

Untersuchungen zum Einfluß von geometrischen Parametern und  
Materialeigenschaften auf die Auflösung der elektromagnetischen  
Kalorimeter FB2E und BBE des H1-Detektors

28. März 1991

Diplomarbeit  
vorgelegt von

Joachim Kurzhöfer

Lehrstuhl für  
Experimentelle Physik V  
Abteilung Physik  
Universität Dortmund

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1	Die Hochenergiephysik am Speicherring HERA . . . . .	4
1.2	Der H1-Detektor . . . . .	5
1.3	Aufgabenstellung und Ziel der Arbeit . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Physikalische Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1	Die Teilchenproduktion in elektromagnetischen Schauern . . . . .	9
2.2	Die Energiedeposition in elektromagnetischen Schauern . . . . .	12
2.3	Die laterale Ausdehnung eines Schauers . . . . .	12
2.4	Longitudinale Schauerentwicklung und Energiedeposition . . . . .	14
2.5	Grundlagen der Kalorimetrie . . . . .	16
2.6	Die Energieauflösung eines Kalorimeters . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Die Kalorimeter FB2E und BBE</b>	<b>20</b>
3.1	Der mechanische Aufbau der Kalorimeter . . . . .	20
3.2	Die Schichtstruktur der Kalorimeterplatten . . . . .	24
3.3	Die Auslesestruktur der Kalorimeter . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Bestimmung der mechanischen Parameter der Normplatten</b>	<b>29</b>
4.1	Die mechanischen Eigenschaften der verwendeten Materialien . . . . .	29
4.2	Bestimmung der Norm-Blei- und G10-Dicken . . . . .	34
4.3	Die Parameter der Normplatten . . . . .	38

<b>5</b>	<b>Messung der Plattendicken und Gapbreiten</b>	<b>42</b>
5.1	Die Messung der Plattendicken . . . . .	42
5.2	Die Messung der Gapbreiten . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Rekonstruktion der Dicken und Abstände über die gesamte Plattenfläche</b>	<b>53</b>
6.1	Generelle Methoden der zweidimensionalen Interpolation . . . . .	53
6.2	Kubische Spline-Funktionen . . . . .	59
6.2.1	Eindimensionale kubische Spline-Interpolation . . . . .	60
6.2.2	Auflösung nach den Stützstellen . . . . .	64
6.2.3	Kubische Spline-Anpassung . . . . .	66
6.2.4	Kombination von zwei eindimensionalen Spline-Funktionen zu einer zweidimensionalen Spline-Funktion . . . . .	67
6.2.5	Auflösung der impliziten Gleichung nach den Variablen $x$ und $y$ . . . . .	69
6.3	Inter- und Extrapolation von Flächen . . . . .	72
6.4	Anwendung auf die Plattendicken . . . . .	75
6.5	Anwendung auf die Gapbreiten . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Analysen mit den rekonstruierten Plattendicken und Gapbreiten</b>	<b>82</b>
7.1	Der Vergleich mit Kontrollmessungen . . . . .	82
7.2	Variation der Knotenabstände . . . . .	85
7.3	Vergleich mit dem gewichteten Mittelwert . . . . .	85
7.4	Die Spacer . . . . .	87
7.5	Verteilungen der Plattendicken . . . . .	90
7.6	Verteilungen der Gapbreiten . . . . .	90
7.7	Betrachtung von kompletten Plattenstapeln . . . . .	101
7.8	Ergebnisse von EGS-Simulationen . . . . .	106
	<b>Zusammenfassung</b>	<b>109</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>111</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>112</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Eine grundlegende Fragestellung der Physik betrifft den Aufbau der Materie. Die Hochenergiephysik will durch die Untersuchung der fundamentalen Bausteine der Materie und der Wechselwirkungen zwischen ihnen diese Fragestellung beantworten. Die prinzipielle Untersuchungsmethode benutzt dafür die Streuung von Teilchen. Projektilteilchen werden beschleunigt und mit Targetteilchen zur Kollision gebracht. Dabei entstehen bei hohen Energien neue Teilchen, deren Art, Energie und Impuls bestimmt werden und somit Rückschlüsse auf die Wechselwirkungen bei der Kollision zulassen. Die mit dieser Methode bestenfalls erreichbare Ortsauflösung  $\Delta x$  ergibt sich aus der Heisenbergschen Unschärferelation[HEIS25] zu

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p}$$

$\Delta p$  ist gleich dem Betrag des maximalen Viererimpulsübertrages  $Q^2$  zwischen den Stoßpartnern. Je größer der maximale Viererimpulsübertrag ist, desto größer ist die maximale Ortsauflösung.

Daher müssen die Projektilteilchen auf sehr hohe Energien beschleunigt werden, um die Grundbausteine der Materie zu untersuchen. Zur Untersuchung der kleinsten bekannten Teilchen werden deswegen die größten wissenschaftlichen Instrumente, die Teilchenbeschleuniger, benötigt. Es gibt zwei grundsätzliche Verfahren bei Streuexperimenten. Bei dem ersten Verfahren werden nur die Projektilteilchen, zum Beispiel Elektronen, beschleunigt, während die Targetteilchen, etwa Protonen, ruhen. Das zweite Verfahren benutzt Speicherringe, in denen die Projektil- und die Targetteilchen gegensinnig beschleunigt werden, wodurch der maximale Impulsübertrag wesentlich erhöht wird. Die Teilchen werden an genau definierten Punkten, den Wechselwirkungspunkten, zur Kollision gebracht.

Die Detektoren solcher Experimente decken den gesamten Raumwinkel um den Wechselwirkungspunkt ab. Dieses ermöglicht es, aufgrund der Energie- und Impuls-Erhaltung auch die physikalischen Größen von Teilchen zu bestimmen, die den Detektor ohne ein meßbares Signal verlassen, wie zum Beispiel Neutrinos. Der klassische Aufbau eines

Speicherring-Detektors besteht aus mehreren einzelnen Detektorkomponenten, um die Messungen verschiedener physikalischer Größen eines Teilchens, zum Beispiel Masse und Energie, zu ermöglichen.

## 1.1 Die Hochenergiephysik am Speicherring HERA

Die Hadron-Elektron-Ring-Anlage HERA, die zur Zeit am DESY<sup>1</sup> in Hamburg gebaut wird, ist die erste Anlage, an der Elektron-Proton-Streuexperimente als Speicherring-Experimente durchgeführt werden können. Die Anlage HERA besteht aus einem 6.3 km großen Ring, in dem auf zwei getrennten Magnetstrecken Elektronen auf eine Energie von 30 GeV und Protonen auf eine Energie von 820 GeV beschleunigt werden. An zwei Wechselwirkungspunkten kollidieren der Elektronenstrahl und der Protonenstrahl unter einem Winkel von 180°. Die Schwerpunktsenergie beträgt 314 GeV, und die erreichbare Ortsauflösung liegt im Bereich von  $10^{-18}$ m und ist damit um mehr als eine Größenordnung kleiner als bei den bisherigen Elektron-Proton-Streuexperimenten.

Die Experimente an HERA haben unter anderem folgende physikalische Zielsetzungen[H1-86,PECC88]:

- Untersuchung der Proton-Strukturfunktionen bei sehr kleinen Abständen und kleinen Werten der Bjorken-Variablen  $x$ .
- Test des Standardmodells bei sehr hohen Impulsüberträgen
- Suche nach „neuer Physik“, zum Beispiel Substrukturen von Quarks und Leptonen, exotischen Teilchen oder rechtshändigen Strömen.

Der kinematische Bereich, in dem genaue Messungen der Strukturfunktionen möglich sind, wird neben der Statistik und der geometrischen Akzeptanz des Detektors durch systematische Abweichungen in der absoluten Kalibrierung der Kalorimeter begrenzt. Bei neutralen Strömen werden die kinematischen Variablen durch das gestreute Elektron bestimmt, sofern es im Detektor sichtbar ist. Eine systematische Abweichung in der Energiemessung des gestreuten Elektrons kann zu großen Abweichungen bei der Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnittes führen. Der „Verstärkungsfaktor“ zwischen den Abweichungen ist annähernd umgekehrt proportional zu  $1/y$ . Liegt zum Beispiel  $y$  nahe 0.1,  $x$  unterhalb von 0.5 und die systematische Abweichung in der Energiemessung bei 1%, dann beträgt die Abweichung des differentiellen Wirkungsquerschnittes 10% [FELT87]. Bei ausschließlicher Verwendung des gestreuten Elektrons wird das Limit für eine präzise Messung der Struktur-Funktionen durch die Genauigkeit der absoluten Kalibrierung der

---

<sup>1</sup>Deutsches Elektronen Synchrotron

Energiemessung gesetzt. Daher ist bei den beiden Experimenten H1 und ZEUS besonderer Wert auf die optimale Identifizierung und Vermessung von Leptonen gelegt worden. Aufgrund der obengenannten Gründe soll das elektromagnetische Kalorimeter des H1-Detektors auf eine Genauigkeit von 1% absolut kalibriert werden.

## 1.2 Der H1-Detektor

Der H1-Detektor steht in der Halle Nord von HERA. Aus den Abbildungen 1.1 und 1.2 ist der schematische Aufbau des H1-Detektors ersichtlich. Der Aufbau des H1-Detektors ist asymmetrisch, da die Wechselwirkungsprodukte aufgrund des hohen Protonenimpulses eine starke Bündelung in Richtung der primären Protonen aufweisen.

Das Strahlrohr (1) wird von Spurendetektoren (2 und 3) umfaßt, um die Richtung und den Impuls von Teilchen zu rekonstruieren. Die Spurendetektoren setzen sich aus planaren und radialen Driftkammern und Übergangsstrahlungsdetektoren zusammen.

An die Spurendetektoren schließen sich die Kalorimeter des H1-Detektors an. Der Vorwärts- und der Radialbereich der Kalorimeter (4 und 5) befinden sich innerhalb eines Kryostaten, der rückwärtige Bereich (12) und das Plugkalorimeter (13) umschließen das Strahlrohr außerhalb des Kryostaten. Die Hauptaufgaben der Kalorimeter sind die Bestimmung der Energie der Teilchen und die Identifizierung von Elektronen [COLO90]. Durch die Unterteilung des Kalorimeters in transversale und longitudinale Segmente ist zusätzlich eine Richtungsbestimmung der einfallenden Teilchen möglich. Dieses ist insbesondere bei neutralen Teilchen wichtig, da diese nicht von den Spurendetektoren erfaßt werden.

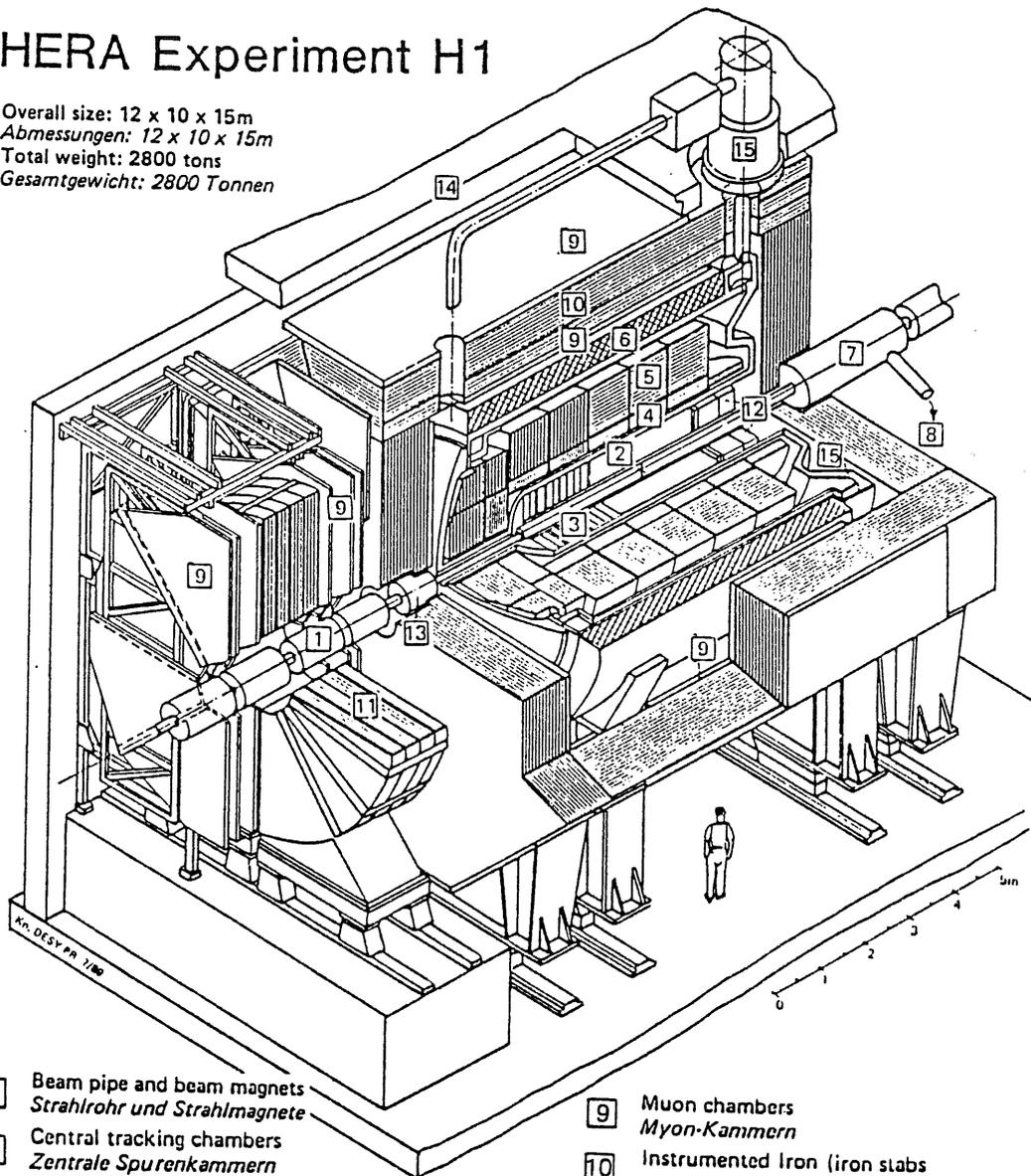
Die im Kryostaten befindlichen Kalorimeter verwenden flüssiges Argon als Auslesemedium, das rückwärtige Kalorimeter Szintillator und das Plugkalorimeter Silizium. Die Kalorimeter (4 und 12) bilden den elektromagnetischen Teil. Als Absorbermaterial dient Blei, bei dem hadronischen Teil (5) dagegen aus Stabilitätsgründen Stahl. Beim Plugkalorimeter (13) besteht der Absorber aus Wolfram.

Die Spurkammern und die radialen Kalorimeter befinden sich innerhalb einer supraleitenden Spule (6), die ein solenoides Magnetfeld parallel zur Strahlachse mit einer Stärke von 1.2 Tesla erzeugt. Das Magnetfeld wird zur Impulsmessung in den Spurendetektoren benötigt. Die Kalorimeter befinden sich innerhalb der Spule, um so wenig Material wie möglich vor den Kalorimetern zu haben.

Zur Rückführung des Magnetfeldes ist die Spule von einem Eisenjoch (10) umgeben, das mit Streamerkammern instrumentiert ist. Diese dienen ebenso wie die mit (9) bezeichneten Myon-Kammern der Vermessung von Myonen.

# HERA Experiment H1

Overall size: 12 x 10 x 15m  
 Abmessungen: 12 x 10 x 15m  
 Total weight: 2800 tons  
 Gesamtgewicht: 2800 Tonnen



- |   |   |    |   |
|---|---|----|---|
| 1 | Beam pipe and beam magnets<br><i>Strahlrohr und Strahlmagnete</i>   | 9  | Muon chambers<br><i>Myon-Kammern</i>  |
| 2 | Central tracking chambers<br><i>Zentrale Spurenkammern</i>  | 10 | Instrumented Iron (iron slabs<br>+ streamer tube detectors)<br><i>Instrumentiertes Eisen (Eisenplatten +<br/>Streamerröhren-Detektoren)</i> |
| 3 | Forward tracking chambers and Transition radiators<br><i>Vorwärtsspurkammern und Übergangsstrahlungsmodul</i> | 11 | Muon toroid magnet<br><i>Myon-Toroid-Magnet</i>   |
| 4 | Electromagnetic Calorimeter (lead)<br><i>Elektromagnetisches Kalorimeter (Blei)</i>                           | 12 | Warm electromagnetic calorimeter<br><i>warmes elektromagnetisches Kalorimeter</i>   |
| 5 | Hadronic Calorimeter (stainless steel)<br><i>Hadronisches Kalorimeter (Edelstahl)</i>                         | 13 | Plug calorimeter (Cu, Si)<br><i>Vorwärts-Kalorimeter</i>  |
| 6 | Superconducting coil (1.2 T)<br><i>Supraleitende Spule (1,2 T)</i>  | 14 | Concrete shielding<br><i>Betonabschirmung</i>   |
| 7 | Compensating magnet<br><i>Kompensationsmagnet</i>   | 15 | Liquid Argon cryostat<br><i>Flüssig Argon Kryostat</i>  |
| 8 | Helium cryogenics<br><i>Helium Kälteanlage</i>  |    |   |
|   | Liquid Argon<br><i>Flüssig Argon</i>  |    |   |

Abbildung 1.1: Perspektivische Ansicht des H1-Detektors

# Experiment H1

- 1 Beam pipe and beam magnets  
Strahlrohr und Strahlmagnete
- 2 Central tracking chambers  
Zentrale Spurenkammern
- 3 Electromagnetic Calorimeter (lead)  
Elektromagnetisches Kalorimeter (Blei) } Liquid Argon  
Flüssig Argon
- 4 Hadronic Calorimeter (stainless steel)  
Hadronisches Kalorimeter (Edelstahl)
- 5 Liquid Argon cryostat  
Flüssig Argon Kryostat
- 6 Superconducting coil (1.2 T)  
Supraleitende Spule (1,2 T)
- 7 Instrumented Iron (iron stabs + streamer tube detectors)  
Instrumentiertes Eisen (Eisenplatten +  
Streamerrohren-Detektoren)
- 8 Muon chambers  
Myon-Kammern
- 9 Concrete shielding  
Betonabschirmung
- 10 Helium cryogenics  
Helium Kälteanlage

Cross section/Querschnitt

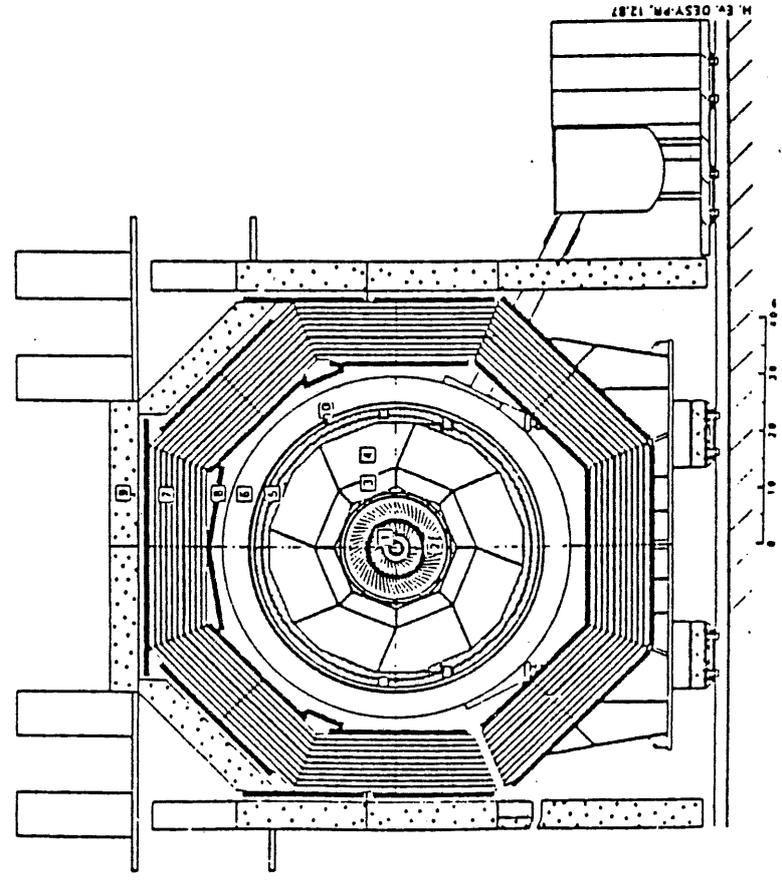


Abbildung 1.2: Querschnitt des H1-Detektors

### 1.3 Aufgabenstellung und Ziel der Arbeit

Um bei den elektromagnetischen Kalorimetern die geforderte Genauigkeit von 1% zu erreichen, ist es notwendig, den mechanischen Aufbau der Kalorimeter genau zu untersuchen, damit die Einflüsse auf die Energieauflösung und absolute Kalibrierung berücksichtigt werden können.

Die Kalorimeter FB2E und BBE sind Sampling-Kalorimeter mit Blei als Absorbermaterial und Flüssig-Argon als Nachweismedium. Durch Variationen in den Schichtdicken wird das Signal des Kalorimeters verändert, was bei der absoluten Kalibrierung berücksichtigt werden muß.

Die Hauptziele dieser Diplomarbeit sind die Rekonstruktion der Plattendicke und der Schichtdicke des Flüssig-Argons über die gesamte Plattenfläche aus diskreten Meßwerten. Diese ermöglicht detaillierte Analysen der Auswirkungen der Variationen, und die Bestimmung von Korrekturfaktoren. Dafür ist eine Methode zu entwickeln, die zweidimensional inter- und extrapoliert, lokale Variationen glättet ohne die globale Form zu verändern und flexibel genug ist, sich an die verschiedenen Anordnungen der diskreten Meßpunkte optimal anzupassen.

Die Analyse des Einflusses der Plattendicke erfordert zudem eine genaue Darstellung des mechanischen Aufbaus der verwendeten Kalorimeterplatten. Dazu werden die einzelnen Komponenten der Kalorimeterplatten analysiert und Normplatten bestimmt, die in ihrem Aufbau den durchschnittlichen Kalorimeterplatten entsprechen.

# Kapitel 2

## Physikalische Grundlagen

Beim Durchgang durch Materie verlieren hochenergetische Teilchen durch starke und elektromagnetische Wechselwirkungen Energie. Dabei produzieren sie Sekundärteilchen, die ihrerseits wiederum tertiäre Teilchen generieren, und so weiter, bis alle oder fast alle Energie durch Ionisation oder Anregung in der Materie deponiert ist. So entsteht eine Kaskade von Teilchen, die als Schauer bezeichnet wird.

Es werden zwei Arten von Schauern unterschieden. Bei elektromagnetischen Schauern finden nur elektromagnetische Wechselwirkungen statt. Daher kommen in einem elektromagnetischen Schauer nur Elektronen, Positronen und Photonen als Sekundärteilchen vor. In der Regel werden elektromagnetische Schauer auch nur von diesen Teilchen und neutralen Pionen ausgelöst, weil die Wirkungsquerschnitte der Strahlprozesse von schwereren Teilchen zu klein sind. Die schweren Teilchen, zum Beispiel geladene Pionen oder Nukleonen, schauern vorwiegend hadronisch auf, weil die starke Wechselwirkung dominiert.

Da die betrachteten Kalorimeter FB2E und BBE elektromagnetische Kalorimeter sind, werden im Folgenden nur elektromagnetische Schauer behandelt.

### 2.1 Die Teilchenproduktion in elektromagnetischen Schauern

Die beiden für die Schauerbildung hochenergetischer Teilchen wichtigsten Prozesse sind die Bremsstrahlung und die Paarbildung.

Beim Prozeß der Bremsstrahlung wird ein Elektron oder Positron im Coulombfeld eines Atomkerns abgebremst und strahlt dabei Energie in Form eines Photons ab. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Prozeß ist nach [ROSS64] proportional zu  $(E/m_0c^2)^4$ , weshalb dieser Prozeß bei schweren Teilchen stark unterdrückt ist. Zur Beschreibung des

Energieverlustes durch Bremsstrahlung wird die materialabhängige Strahlungslänge  $X_0$  definiert. Die Strahlungslänge  $X_0$  ist gleich der mittleren Weglänge, die ein hochenergetisches Elektron in der Materie zurücklegen muß, bis seine Energie auf  $1/e \approx 38\%$  abgefallen ist [PERK87]:

$$\langle E \rangle = E_0 \exp\left(-\frac{x}{X_0}\right) \iff \left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = -\frac{E}{X_0}$$

Für ein bestimmtes Material ergibt sich die Strahlungslänge aus der Formel [PERK87]

$$\frac{1}{X_0} = \frac{4Z(Z+1)r_e^2 N_a}{137A} \ln\left(\frac{183}{\sqrt[3]{Z}}\right)$$

mit

- $A$  = Atomgewicht des Materials
- $r_e$  = Klassischer Elektronenradius
- $N_a$  = Avogadro'sche Zahl
- $Z$  = Kernladungszahl des Materials

Bei dem Prozeß der Paarbildung wandelt sich ein Photon in ein Elektron-Positron-Paar um. Die Masse des Paares setzt die untere Grenze der Energie des Photons  $E_\gamma \geq 2m_e c^2$  für die Paarbildung. Aufgrund der Impulserhaltung kann die Paarbildung nur in dem Bereich eines Atomkern stattfinden. Die mittlere freie Weglänge  $\lambda$  der Photonen beträgt nach [OTT53]:

$$\lambda = \frac{9}{7} X_0$$

Neben diesen beiden Prozessen treten auch noch folgende Prozesse in einem elektromagnetischen Schauer auf:

Für Elektronen und Positronen:

Møllerstreuung :	$e^- + e^-$	$\rightarrow$	$e^- + e^-$
Bhabhastreuung :	$e^- + e^+$	$\rightarrow$	$e^- + e^+$
Annihilation :	$e^- + e^+$	$\rightarrow$	$\gamma + \gamma$
Kleinwinkelstreuung :	$e^\pm + \text{Atomkern}$	$\rightarrow$	$e^\pm + \text{Atomkern}$

Für Photonen:

Comptonstreuung :	$\gamma + e^-$	$\rightarrow$	$\gamma + e^-$
Photoeffekt :	$\gamma + \text{Atom}$	$\rightarrow$	$\gamma + e^- + \text{Atom}$

In Abbildung 2.1 ist die Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte der verschiedenen Prozesse dargestellt.

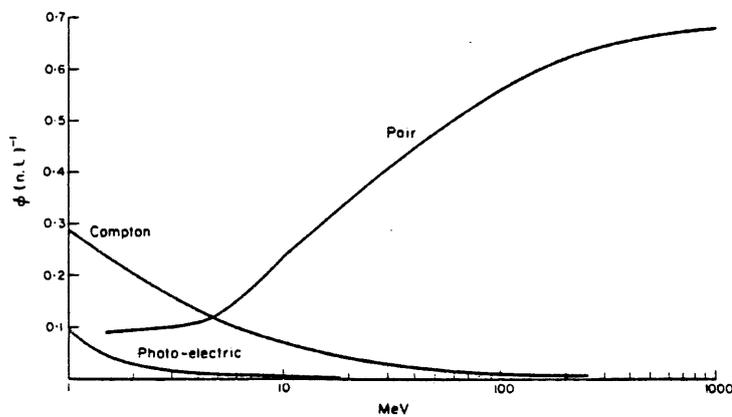
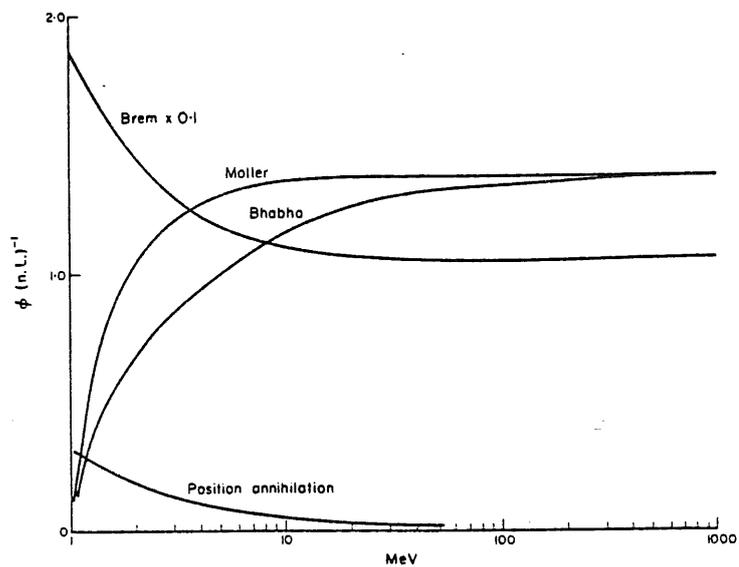


Abbildung 2.1: Totaler Wirkungsquerschnitt für Elektronen und Photonen als Funktion der Energie in einem Bleiabsorber, ausgedrückt in inversen Strahlungslängen. Das entspricht 1/59 barn pro Atom. [MESS70]

## 2.2 Die Energiedeposition in elektromagnetischen Schauern

Die Elektronen und Positronen verlieren ihre Energie nicht nur durch die obengenannten Prozesse, sondern deponieren auch durch Ionisations- und Anregungsprozesse Energie in dem Medium. Der mittlere Energieverlust durch Ionisation beträgt nach [SEGR53]:

$$-\left. \frac{dE}{dx} \right|_{ion} = \frac{4\pi e^4 n}{m_e c^2 \beta^2} \left\{ \ln \frac{m_e c^2 \beta^2 T}{2I^2(1-\beta^2)} - \left[ 2\sqrt{1-\beta^2} - 1 + \beta^2 \right] \ln 2 - \frac{1 - \sqrt{1-\beta^2}}{8} - \delta \right\}$$

- mit  $e$  = Elementarladung  
 $m_e$  = Ruhemasse des Elektrons  
 $c$  = Lichtgeschwindigkeit  
 $\beta$  =  $v/c$  = relativistische Elektronengeschwindigkeit  
 $T$  = kinetische Energie des Elektrons  
 $n$  = Elektronendichte im Absorbermaterial  
 $I$  = mittleres Ionisationspotential  
 $\delta$  = Dichtekorrekturfunktion nach Sternheimer [STER52]

Bei Positronen muß zusätzlich noch die deponierte Energie der zwei Photonen berücksichtigt werden, die bei der Annihilation entstehen.

Die materialabhängige kritische Energie  $\epsilon$  ist als die Energie definiert, bei der der Energieverlust durch Ionisationsprozesse gleich demjenigen durch Bremsstrahlung ist. Oberhalb der kritischen Energie  $\epsilon$  dominieren die Strahlungsverluste, unterhalb die Ionisationsverluste. In Abbildung 2.2 ist der Energieverlust für verschiedene Prozesse als Funktion der Energie angegeben. Nach [BERG82] ist die kritische Energie  $\epsilon$  gleich dem Energieverlust eines minimalionisierenden Teilchens auf einer Strahlungslänge:

$$\epsilon = \frac{dE}{dx}_{min} X_0 \approx \frac{580}{Z} \text{ MeV}$$

## 2.3 Die laterale Ausdehnung eines Schauers

Die laterale Schauerentwicklung erfolgt im Wesentlichen durch Kleinwinkelstreuungen, außerdem tragen noch Bremsstrahlung und Paarbildung bei. Der mittlere Streuwinkel  $\Theta$  der beiden letztgenannten Prozesse ist nach [BETH34]  $\approx m_e c^2 / E$ . Bei der Kleinwinkelstreuung werden Elektronen elastisch im Coulombfeld der Atomkerne gestreut. Die Winkelverteilung der gestreuten Elektronen wird aufgrund der großen Kernmassen durch die Rutherford-Formel beschrieben [PERK87]. Die Winkelabhängigkeit des differentiellen

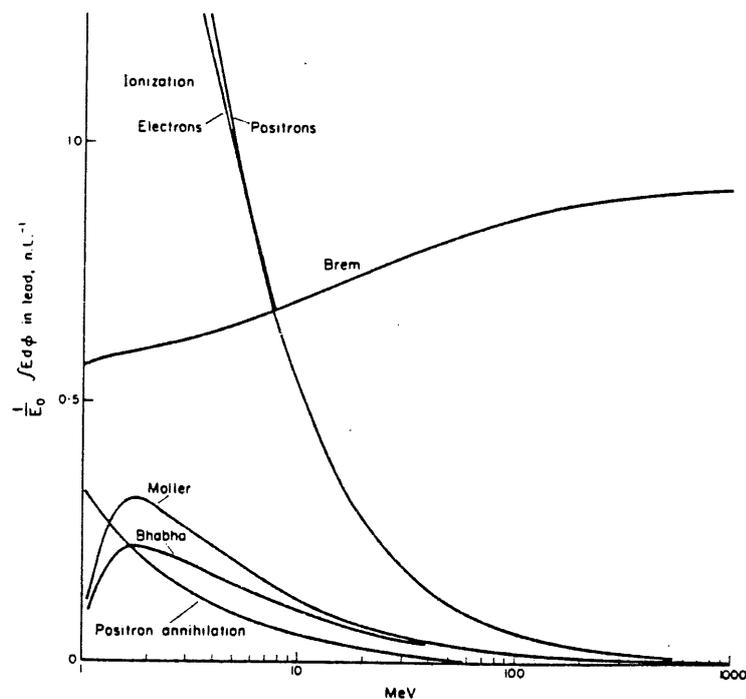


Abbildung 2.2: Mittlerer Energieverlust von Elektronen in Blei als Funktion der Energie. Er ist nach [MESS70] wie folgt definiert:

Bremsstrahlung: 
$$\frac{1}{E_0} \int_0^{E_0-1} k d\Phi$$

Ionisation: 
$$\frac{1}{E_0} \frac{dE_0}{dt}$$

Møller- bzw. Bhabba-Streuung: 
$$\frac{1}{E_0-1} \int (E-1) d\Phi$$

Positronannihilation: totaler Wirkungsquerschnitt  $\Phi$

Wirkungsquerschnittes beträgt  $1/\sin^4(\Theta/2)$ , der Wirkungsquerschnitt ist also für kleine Streuwinkel sehr groß. Die Kleinwinkelstreuung setzt sich daher aus vielen kleinen Ablenkungen zusammen, die voneinander unabhängig sind. Die Verteilung des Streuwinkels ist annähernd gaußförmig.

Der mittlere Ablenkungswinkel  $\Theta_m$  eines Teilchens nach dem Durchlaufen einer Materieschicht der Dicke  $x$  ergibt sich nach der Molièreschen Theorie [MOLI48] zu:

$$\langle \Theta_m \rangle = \frac{21 \text{ MeV}}{E(\text{in MeV})} \sqrt{\frac{x}{X_0}}$$

Der Molière-Radius  $R_m$ , definiert als

$$R_m = m_e c^2 \sqrt{4\pi/\alpha} \frac{X_0}{\epsilon} \approx \frac{21 \text{ MeV}}{\epsilon} X_0,$$

kann als natürliche Längeneinheit für die laterale Schauerentwicklung betrachtet werden. Wie aus Abbildung 2.3 ersichtlich ist, wird 90 % der Energie des Schauers innerhalb des Radius  $R_m$  deponiert. Die Energie außerhalb des Molière Radius wird von niederenergetischen Photonen deponiert, die aufgrund des kleinen Massenabsorptionskoeffizienten große Strecken ohne Wechselwirkungen zurücklegen können.

## 2.4 Longitudinale Schauerentwicklung und Energie-deposition

Bei der Schauerentwicklung sind die einzelnen Prozesse für sich zwar verstanden und analytisch berechenbar, doch wegen des komplexen Zusammenspiels der Prozesse entzieht sich die Schauerentwicklung einer detaillierten analytischen Beschreibung. Mit Hilfe eines einfachen Modells [ROSS64] lassen sich jedoch Aussagen über das mittlere Verhalten des Schauers machen.

Durch Verwendung der Strahlungslänge  $X_0$ , der kritischen Energie  $\epsilon$  und des Molière Radius  $R_m$  kann der Schauer materialunabhängig beschrieben werden. Das Modell zerlegt den Schauer in zwei Phasen. In der ersten Phase haben die Elektronen, Positronen und Photonen eine Energie oberhalb der kritischen Energie. In dieser Phase strahlen die Elektronen und Positronen nach einer Strahlungslänge ein Photon ab, das die halbe Energie trägt. Ebenso erzeugt ein Photon nach einer Strahlungslänge ein Elektron-Positron-Paar, wobei jedes Teilchen die halbe Energie des Photons trägt. Nach jeder Strahlungslänge verdoppelt sich also die Anzahl der Teilchen im Schauer, während die mittlere Energie pro Teilchen halbiert wird. Die Anzahl der Teilchengenerationen bis zum Erreichen der kritischen Energie ist gleich  $n = \ln(E_0/\epsilon)/\ln 2$ , im Schauermaximum sind insgesamt  $2^n \sim E_0/\epsilon$  Teilchen vorhanden. Beim Erreichen der kritischen Energie geht der Schauer in die zweite Phase über. Es werden keine neuen Teilchen mehr produziert, die Anzahl

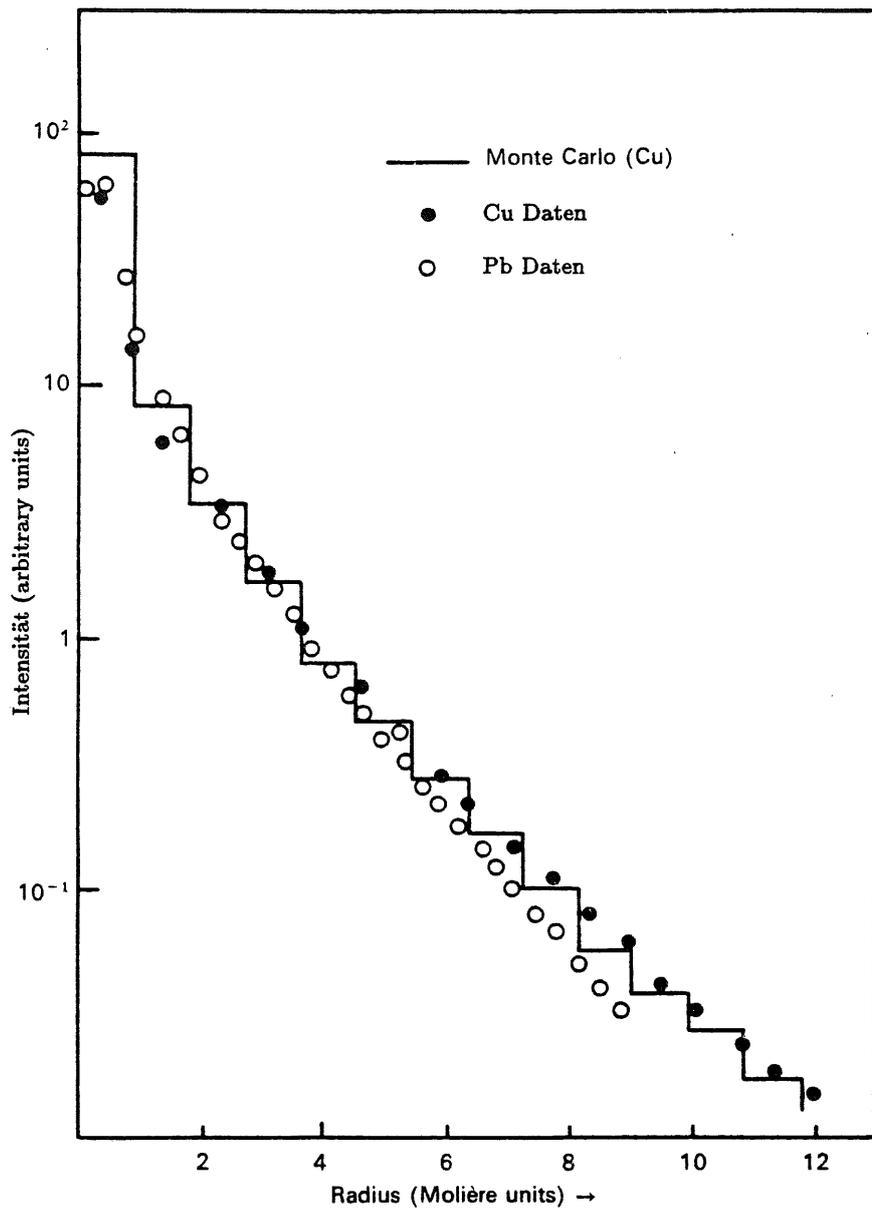


Abbildung 2.3: Laterale Verteilung der Energiedeposition eines 6 GeV Elektron-Schauers. Die einzelnen Punkte sind Messungen, die durchgezogene Linie ist durch Monte-Carlo Rechnungen bestimmt worden. Auf der horizontalen Achse ist der Radius in Einheiten des Molière Radius angegeben, auf der senkrechten Achse die deponierte Energie in willkürlichen Einheiten (nach [BATH70])

der Teilchen nimmt gemäß einem Absorptionsgesetz exponentiell ab. Mit detaillierten Analysen [ROSS64] können die Ergebnisse verallgemeinert werden, wobei  $q$  der „Vermehrungsfaktor“ pro Strahlungslänge  $t$  ist.

- Die Gesamtzahl der Teilchen in einem Schauer ist proportional zur Energie des Primärteilchens:  $N_{total} \sim E_0/\epsilon$
- Die Teilchen haben nach  $t$  Strahlungslängen eine mittlere Energie von  $E(t) \sim q^t$
- Die Lage des Schauermaximums hängt logarithmisch von der Energie des Primärteilchens ab:  $t_{max} \sim \ln(E_0/\epsilon)$

Die integrierte Weglänge  $S$  für Elektronen und Positronen ergibt sich nach [AMAL81] zu:

$$S = \frac{E_0}{\epsilon} X_0$$

Da zur Ionisation bestimmte Energien aufgebracht werden müssen, zum Beispiel bei Gasen in der Größenordnung von 30 eV, können die Elektronen und Positronen ab einer Abschneide-Energie  $E_c$  nicht mehr nachgewiesen werden. Die sichtbare Gesamtpurlänge wird dadurch verkürzt, was in der obigen Gleichung durch Hinzufügen eines Korrekturfaktors berücksichtigt werden kann [AMAL81]:

$$S' = F(z) \frac{E_0}{\epsilon} X_0$$

mit  $F(z) = e^z(1 + z \ln(z/1.526))$

$$z = 4.58 Z E_c / (A \epsilon)$$

$Z$  = Kernladungszahl

$A$  = Atomgewicht

Die longitudinale Verteilung der Energiedeposition für verschiedene Materialien ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Sie wird durch die folgende Formel beschrieben [LONG75]:

$$\frac{dE}{dt} = E_0 \xi t^\alpha e^{-\beta t}$$

$$\text{mit } t = \frac{x}{X_0}, \quad \beta \approx 0.5, \quad \alpha \approx \beta t_{max}, \quad \xi = \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

## 2.5 Grundlagen der Kalorimetrie

Aus den Überlegungen im vorherigen Abschnitt ergibt sich, daß die Energie des einfallenden Teilchens proportional zur der im Schauer deponierten Energie ist. Daher kann mit

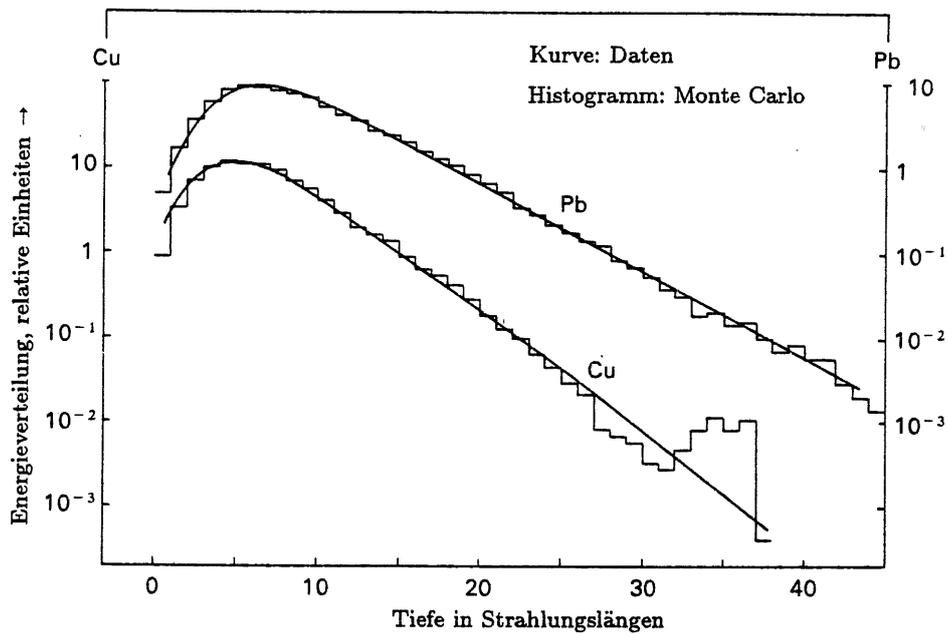


Abbildung 2.4: Longitudinale Verteilung des Energieverlustes  $dE/dt$  in einem elektromagnetischen Schauer, normiert auf die Energie  $E_0 = 6\text{GeV}$  des einfallenden Elektrons.  $\xi = X/X_0$  ist die Eindringtiefe  $X$  in Einheiten der Strahlungslänge  $X_0$ . Messungen (Linie), Monte-Carlo-Rechnung (Histogramm) nach [BATH70]

totalabsorbierenden Schauerzählern und Kalorimetern die Energie von Teilchen bestimmt werden.

Es existieren zwei Grundarten von Kalorimetern, die homogenen Kalorimeter und die Sampling-Kalorimeter. Die homogenen Kalorimeter, zum Beispiel der Crystal Ball Detektor, bestehen nur aus einem Medium, zum Beispiel Bleiglas oder NaJ (Tl) Kristalle, das sowohl Absorbermaterial als auch Auslesemittel ist. Gemessen wird die Intensität des Cerenkov- oder Szintillationslichtes, die ein Maß für die deponierte Energie ist. Die Nachteile dieser Detektoren liegen in den großen Strahlungslängen der meisten zur Verfügung stehenden Materialien und der fehlenden Möglichkeit, die longitudinale Energiedeposition des Schauers zu messen. Die Analyse der longitudinalen Verteilung der Energiedeposition eines Schauers ist ein wesentlicher Bestandteil der Elektron-Pion-Trennung [COLO90].

Die Sampling-Kalorimeter sind aus abwechselnden Schichten des Absorbermaterials und des Nachweismediums aufgebaut. Dadurch kann ein Absorbermaterial mit kleinen Strahlungslängen, wie etwa Blei, verwendet werden, was eine kompakte Bauweise des Kalorimeters ermöglicht. Die Energiedichte des Schauers wird stichprobenartig in den Schichten des Nachweismediums gemessen. Vertreter dieser Kalorimeterbauweise sind das Blei-Szintillator-Sandwichkalorimeter im ARGUS-Detektor [DRES82] und die in dieser Arbeit untersuchten Flüssig-Argon-Kalorimeter.

Die Bestimmung der deponierten Energie bei Flüssig-Argon-Kalorimetern beruht auf der Messung der durch Ionisationsprozesse in Flüssig-Argon freigesetzten Ladungen. Um, wie bei Ionisationskammern, ein elektrisches Feld in den Flüssig-Argon-Schichten zu erzeugen, werden die Absorberplatten abwechselnd auf Hochspannungspotential und Erdpotential gelegt. Die von dem Schauer erzeugten Elektronen wandern in dem elektrischen Feld und influenzieren auf den Ausleseflächen ein Signal, das ausgelesen wird. Die positiven Ionen haben wegen ihrer sehr kleinen Beweglichkeit nur einen vernachlässigbaren Einfluß auf das Signal [FELT89].

Flüssig-Argon hat gegenüber den sonst in Ionisationskammern verwendeten Gasen eine um etwa drei Größenordnungen höhere Dichte, weshalb entsprechend mehr Ionenpaare gebildet werden, welche ein größeres Signal erzeugen.

Die Anzahl der produzierten Ionenpaare und dementsprechend das Kalorimetersignal ist proportional zur Dicke der Flüssig-Argon Schichten. Bei einer Genauigkeit der absoluten Energiebestimmung von 1% darf die globale Dicke der Flüssig-Argon Schichten daher auch nur um maximal 1% variieren, wenn die Dickenvariationen nicht durch Korrekturfaktoren berücksichtigt werden. Dies entspricht bei einer durchschnittlichen Schichtdicke von 2.35 mm des Flüssig-Argons einer maximal erlaubten Abweichung von  $\pm 24 \mu\text{m}$  der mittleren Schichtdicke. Die Grenzen für lokale Variationen sind nicht so einfach zu bestimmen, da Mittelungseffekte bei der Auslese des Signals berücksichtigt werden müssen.

## 2.6 Die Energieauflösung eines Kalorimeters

Die Anzahl der im Schauer vorhandenen Teilchen  $N$  ist der Energie des Primärteilchens proportional. Nun unterliegt aber die Teilchenanzahl  $N$  statistischen Fluktuationen in der Größenordnung von  $\sqrt{N}$ , woraus eine endliche Energieauflösung folgt:

$$\frac{\sigma(E)}{E} \sim \frac{1}{\sqrt{E}}$$

Da bei Sampling-Kalorimetern die im Absorber deponierte Energie nicht nachgewiesen wird, verschlechtert sich die Energieauflösung. Die Anzahl der von der Gesamtpurlänge nachgewiesenen Spuren  $N$  ergibt sich zu:

$$N = \frac{S}{D} = \frac{EX_0F(z)}{\epsilon D}$$

wobei  $D$  die Dicke einer Samplingzelle ist. Durch  $F(z)$  wird die Abschneide-Energie  $E_c$  berücksichtigt. Für Flüssig-Argon liegt die mittlere Ionisationsenergie nach [BEND73] bei  $23.6_{-0.3}^{+0.5} eV$ . Als Energieauflösung erhält man:

$$\frac{\sigma(E)}{E} = \sqrt{\frac{\epsilon D}{X_0 F(z) \sqrt{E_0}}} \frac{1}{\sqrt{E_0}}$$

Dies ist nur eine untere Abschätzung, da zum Beispiel Landau-Fluktuationen oder Leckverluste die Energieauflösung weiter verschlechtern können [KLEIN87].

## Kapitel 3

# Die Kalorimeter FB2E und BBE

In diesem Kapitel wird der Aufbau der Kalorimeter FB2E und BBE beschrieben.

Die Bezeichnung FB2E steht für **F**orward **B**arrel **2<sup>nd</sup>** **E**lectromagnetic, den zweiten elektromagnetischen Kalorimeterring im vorderen Radialbereich, BBE für **B**ackward **B**arrel **E**lectromagnetic, den elektromagnetische Kalorimeterring im hinteren Radialbereich des H1-Detektors. Abbildung 1.1 stellt die Lage der beiden Ringe innerhalb des H1-Detektors dar. Beide dienen zur Energiemessung von Teilchen, die elektromagnetische Teilchenschauer erzeugen. Die zu messenden Teilchen erreichen das FB2E-Kalorimeter unter einem Polarwinkel  $\vartheta$  zur Strahlachse in Protonrichtung von zwischen  $19^\circ$  und  $26^\circ$ , beim BBE-Kalorimeter liegt der Winkel zwischen  $147^\circ$  und  $155^\circ$ .

### 3.1 Der mechanische Aufbau der Kalorimeter

Bei beiden Kalorimetern handelt es sich um Sampling-Kalorimeter mit Blei als Absorbiermaterial und Flüssig-Argon als Auslesemmedium. Die Ringe bestehen aus jeweils acht Modulen, auch als Stacks bezeichnet. Jeder Stack deckt im H1-Detektor einen Azimutwinkel von  $45^\circ$  ab, was aus Abbildung 1.2 zu erkennen ist.

Die Stacks bestehen aus einzelnen Platten, die sowohl als Absorber als auch zur Auslese der im Flüssig-Argon durch den Teilchenschauer erzeugten Ladungen dienen, und einer Eisenkonstruktion, die die Platten zusammenhält. Das Flüssig-Argon befindet sich in den Zwischenräumen der Platten, im Folgenden auch als Gaps bezeichnet. Jeweils 123 Platten für FB2E und 84 Platten für BBE sind so zu einem Stack zusammengefaßt. Bei der Zusammstellung der Platten für ein Stack ist ein Zufallsgenerator benutzt worden, um die Platten der gesamten Produktion zu mischen.

Es existieren insgesamt vier verschiedene Sorten von Kalorimeterplatten, zwei Grundarten, die Hochspannungs- und Ausleseplatten, und jeweils eine Variante ohne Bleiabsorber, um bestimmte Hardwaregegebenheiten besser zu berücksichtigen.

An den Hochspannungsplatten, kurz HVB für High-Voltage Board, liegt eine Hochspannung von 2500 Volt an. Mit dieser Spannung wird in den Gaps ein elektrisches Feld erzeugt, in dem sich die durch den Teilchenschauer erzeugten Ladungen bewegen. Mit den Ausleseplatten, auch als ROB (Read-Out Board) bezeichnet, werden diese Ladungen dann ausgelesen. Im Kern der Platten befindet sich eine Bleiplatte als Absorber.

Beide Plattensorten existieren auch in bleilosen Ausführungen und werden kurz als HVB-NOPB und ROB-NOPB (von **no Pb** = kein Blei) bezeichnet. Diese Platten befinden sich innerhalb der Eisenkonstruktion am Anfang und Ende jedes Kalorimetermoduls, bei FB2E auch noch vor und hinter der Mittelplatte. Sie enthalten kein Blei als Absorbiermaterial, um das durch die Eisenkonstruktion des Moduls verursachte tote Material auszugleichen [BORR87,LENH89]. Außerdem sind sie noch, von der Protonrichtung aus gesehen, vor dem FB2E-Modul und hinter dem BBE-Modul angebracht, um die Auswirkungen der Zwischenräume zwischen den Kalorimetern FB2E und FB1E beziehungsweise CB1 und BBE zu kompensieren. Die Ecken dieser Platten von FB2E sind aufgrund der mechanischen Verbindung zu den hadronischen Modulen von FB2H anders geformt.

Die Tabelle 3.1 gibt die Anzahl der verschiedenen Plattenarten für einen Stack an.

Kalorimeter	ROB	HVB	ROB-NOPB	HVB-NOPB
FB2E	57	57	3	6
BBE	39	39	2	4

Tabelle 3.1: Anzahl der verschiedenen Plattenarten in einem Stack

Die prinzipielle Abfolge der Platten ist HVB-ROB-HVB-...-ROB-HVB. Da für die Auslese der Ladungen ein elektrisches Feld benötigt wird, beginnt und endet jeder Teil der Plattenstapel mit einer Hochspannungsplatte. In Abbildung 3.1 ist die Plattenabfolge eines FB2E-Stacks angegeben.

Neun Stahlstangen fixieren die Kalorimeterplatten in der Eisenkonstruktion des Stacks. Um gleichbleibende Abstände von 2.35 mm zwischen den Platten zu gewährleisten, befinden sich auf den Stangen in den Gaps Distanzringe aus G10<sup>1</sup>, wegen ihrer Funktion auch Spacer genannt. Abbildung 3.2 gibt die perspektivische Darstellung eines einzelnen FB2E-Stacks wieder. Die eiserne Mittelplatte bei den FB2E-Stacks dient der Stabilität.

In Abbildung 3.5 ist die Form der FB2E-Platten zu sehen, die Grundform ist ein Trapez. Wie aus Abbildung 3.5 ersichtlich, ist diese Form beim BBE-Kalorimeter um zwei zusätzliche dreieckige Flächen ergänzt worden, um eine gleichmäßige Verteilung der Strahlungslänge des Kalorimeters in  $\varphi$  zu erreichen.

<sup>1</sup>G10 ist eine allgemeine Bezeichnung für glasfaserverstärkten Epoxyd Kunststoff

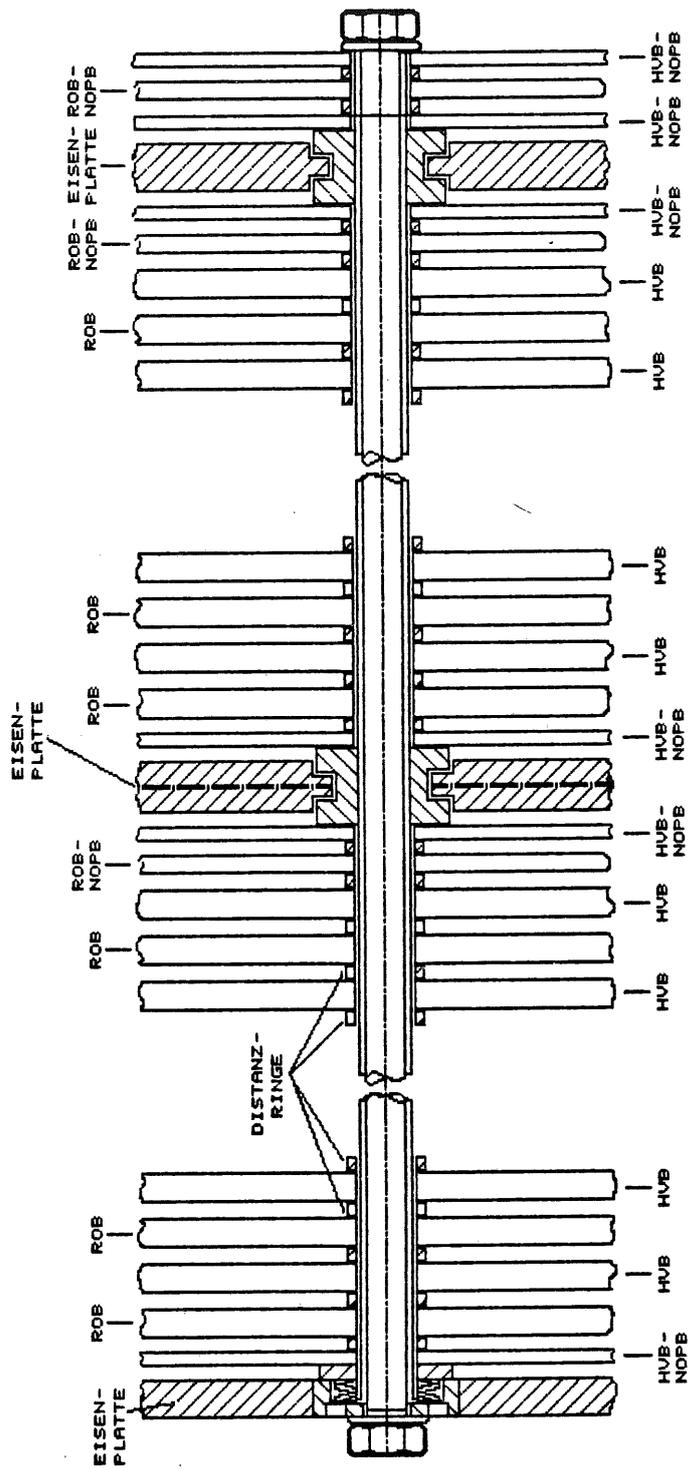


Abbildung 3.1: Die Abfolge der Platten in einem FB2E-Stack

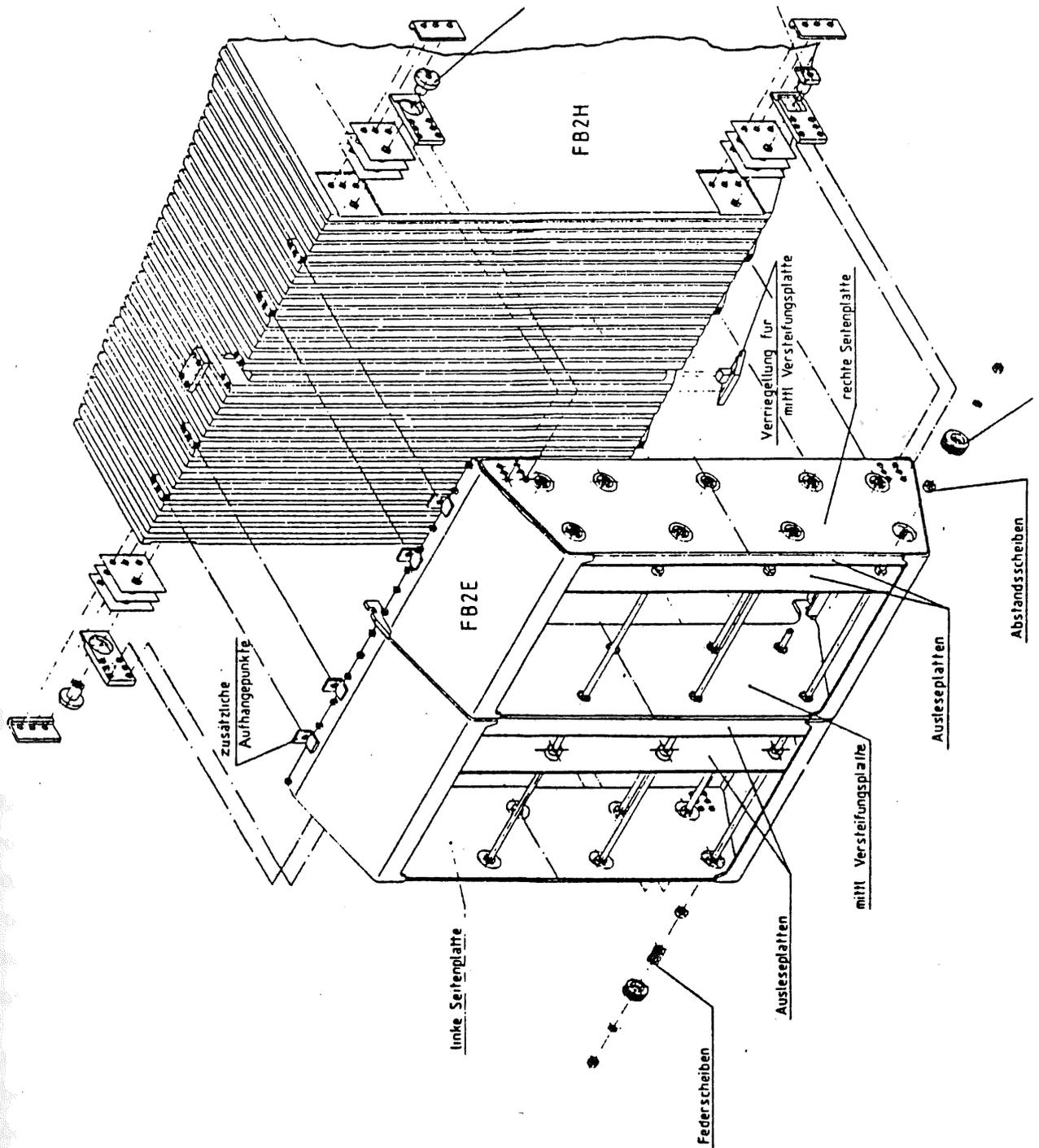


Abbildung 3.2: Perspektivische Darstellung eines FB2E-Moduls

Eisenstange mit Teflonschlauch

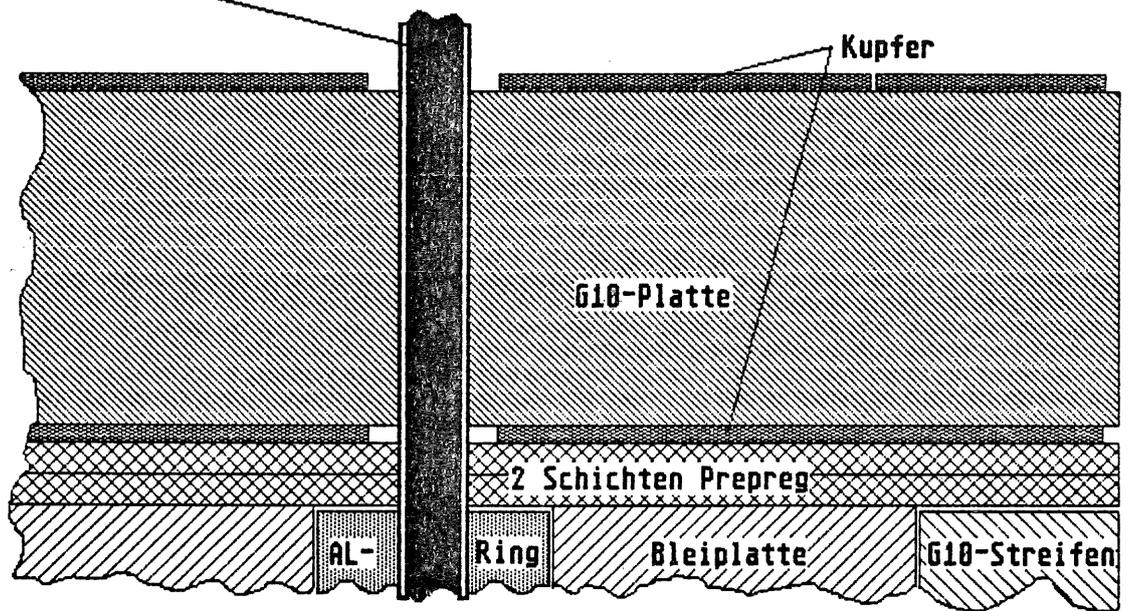


Abbildung 3.3: Die Schichtstruktur einer FB2E-Ausleseplatte

### 3.2 Die Schichtstruktur der Kalorimeterplatten

Die einzelnen Kalorimeterplatten sind aus mehreren Komponenten aufgebaut, da sie sowohl den Blei-Absorber enthalten als auch der Auslese der Ladungen dienen. Es werden hohe Ansprüche an die Verbindung der einzelnen Komponenten gesetzt, weil die Platte sowohl bei Raumtemperatur als auch bei Flüssig-Argon Temperatur mechanisch stabil sein muß. Abbildung 3.3 und Abbildung 3.4 zeigen den Schichtaufbau einer FB2E-Auslese- und einer Hochspannungsplatte.

In der Mitte jeder Kalorimeterplatte befindet sich eine Bleiplatte als Absorber. Sie trägt über 50% zur Dicke und über 80% zur Masse der Kalorimeterplatten bei. In den neun Löchern der Bleiplatte befinden sich Aluminiumringe zur Kompensation der Stahlstangen, die die Kalorimeterplatten im Modul halten. Die Stahlstange ist mit einem Teflonschlauch überzogen. Das Blei reicht überall bis 4 mm an den Rand heran, nur bei den FB2E-Platten endet es an der kurzen Seite schon 24 mm vorher. Dieser Bereich entspricht der  $\Theta$ -Lage 0 der Ausleseflächen, und wird als Presampler bezeichnet. Vor dem Kalorimeter befindet sich vor allem in Form der Stützkonstruktionen der inneren Detektorkomponenten und der Kryostatenwand Material, in dem die Teilchen schon anschauen und Energie deponieren. Um den Anfang des Schauers zu messen ist der Absorber im ersten Teil des Kalorimeters herausgelassen worden. Statt des Bleis enthält dieser Bereich G10-Streifen oder Epoxydharz. Das BBE-Kalorimeter besitzt keinen Presampler.

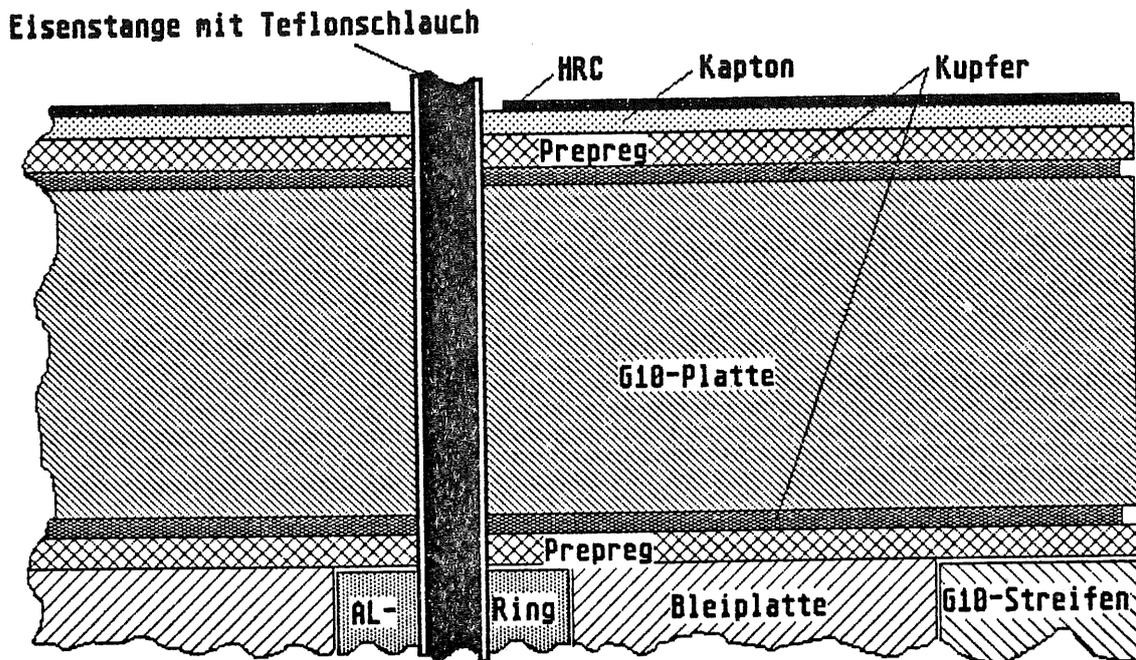


Abbildung 3.4: Die Schichtstruktur einer FB2E-Hochspannungsplatte

Die einzelnen Komponenten der Platten werden mit Prepreg zusammengeklebt. Prepreg ist eine Glasfaser-Matte, die auf beiden Seiten mit Epoxydharz beschichtet ist. Bei Temperaturen von  $130^{\circ}\text{C}$  ist das Epoxydharz flüssig, und verteilt sich gleichmäßig, weil die Platten unter einem Druck von 60 bar verklebt werden. Beim Abkühlen auf Zimmertemperatur wird das Epoxydharz wieder fest und schafft so eine dauerhafte Verbindung zwischen den einzelnen Plattenkomponenten. Bei den Hochspannungsplatten werden vier Lagen Prepreg benötigt, was aus Abbildung 3.4 deutlich wird. Damit die Ausleseplatten nach Möglichkeit die gleiche Plattendicke aufweisen, werden wie aus Abbildung 3.3 ersichtlich zwei Lagen Prepreg aufeinander geklebt. Auf das Prepreg wird eine beidseitig mit Kupfer beschichtete G10-Platte geklebt. Bei den Hochspannungsplatten geht das Kupfer bis zum Rand, bei den Ausleseplatten bis 4 mm vor den Rand. Die obere Kupferfläche bei den Ausleseplatten ist in einzelne Segmente, Pads genannt, unterteilt. Bei den Hochspannungsplatten wird auf die freie Kupferfläche wieder eine Schicht Prepreg und eine Kaptonfolie geklebt. Die Kaptonfolie ist eine hochspannungsfeste Polyamidfolie und trennt die auf Hochspannung liegende HRC-Schicht von der auf Masse liegenden Kupferfläche. Die HRC-Schicht (High Resistive Coating) ist eine Mischung aus Graphit und Epoxydharz und wird mit dem Siebdruckverfahren auf die Kaptonfolie aufgetragen. Aufgrund des hohen Widerstandes in der Größenordnung von  $M\Omega$  trägt die HRC-Schicht wesentlich zur elektrischen Sicherheit bei, insbesondere bei Kurzschlüssen in den Hochspannungsplatten.

In Kapitel 4 werden die einzelnen Komponenten und besonders ihre mechanischen Eigen-

schaften ausführlich behandelt.

### 3.3 Die Auslesestruktur der Kalorimeter

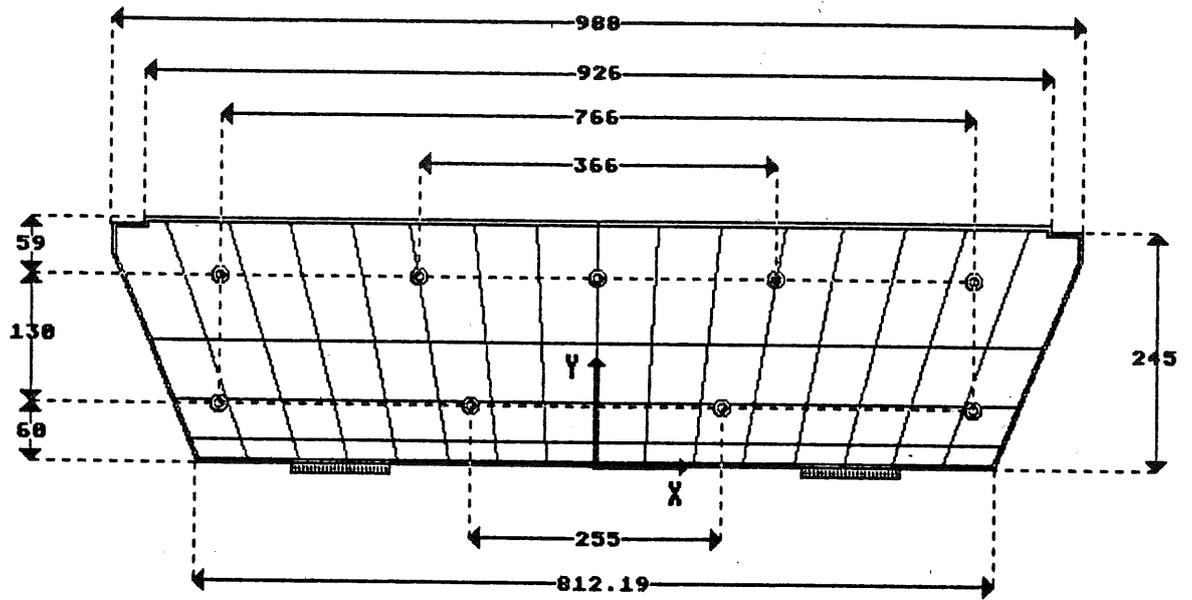
Die Kupferfläche einer FB2E-Ausleseplatte ist in 64 einzelne Flächen (Pads) unterteilt, die getrennt ausgelesen werden. Abbildung 3.5 gibt diese Einteilung wieder. Die Pads sind in vier Reihen angeordnet, die aus jeweils 16 äquidistant verteilten Pads bestehen. Die Höhe der Pads nimmt in Y-Richtung hin zu und ist für die einzelnen Reihen, die im folgenden als  $\Theta$ -Lagen bezeichnet werden, in Tabelle 3.2 angegeben. Beim BBE-Kalorimeter sind es nur 24 Pads, die in drei  $\Theta$ -Lagen mit jeweils acht Pads angeordnet sind (siehe Abbildung 3.5). Die Padhöhen der einzelnen Thetalagen können der Tabelle 3.2 entnommen werden.

Als aktive Plattenfläche wird diejenige Fläche bezeichnet, die ausgelesen wird.

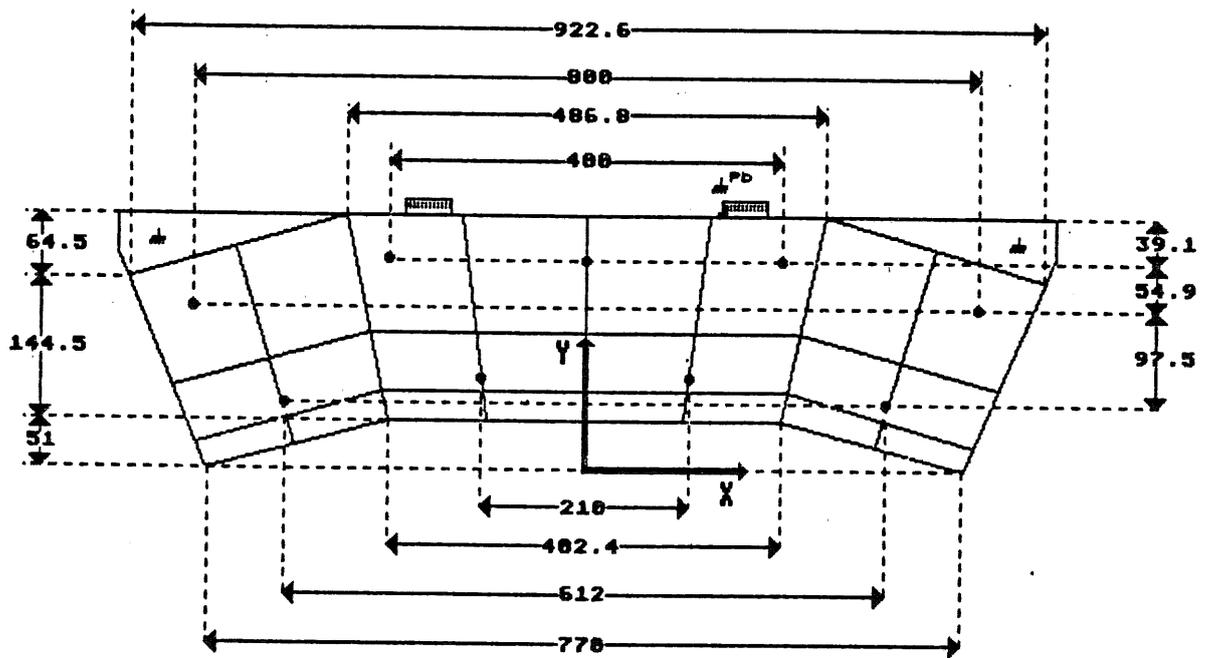
$\Theta$ -Lage	Padhöhe (cm)	
	FB2E	BBE
0	2	3
1	4	6
2	6	11
3	12	—

Tabelle 3.2: Radiale Padeinteilung der Kalorimeter FB2E und BBE

Die kleinste Ausleseeinheit besteht aus einer Hälfte einer Hochspannungsplatte, dem mit Flüssig-Argon gefüllten Gap und der Hälfte einer Ausleseplatte und wird als Auslezelle bezeichnet. Um die Anzahl der elektronischen Kanäle auf eine sinnvolle Zahl zu begrenzen, werden mehrere Auslezellen hintereinander zu einem Z-Segment zusammengefaßt. Die Pads, die sich in einem Z-Segment jeweils an der gleichen Position auf den Ausleseplatten befinden, werden zusammen als ein elektronischer Kanal ausgelesen. Für FB2E sind das bei acht Z-Segmenten insgesamt  $64 * 8 = 512$  Kanäle pro Stack, bei BBE sind es fünf Z-Segmente und damit  $24 * 5 = 120$  Kanäle pro Stack. Die Aufteilung der Gaps in die Z-Segmente geht aus Tabelle 3.3 hervor.



**FB2E-Ausleseplatte**



**BBE-Ausleseplatte**

Abbildung 3.5: Anordnung der Ausleseflächen bei FB2E und BBE

Z-Segment	FB2E-Kalorimeter		BBE-Kalorimeter	
	Gap-Nummer	Gap-Anzahl	Gap-Nummer	Gap-Anzahl
0	0 - 13	14	0 - 17	18
1	14 - 27	14	18 - 33	16
2	28 - 41	14	34 - 49	16
3	42 - 55	14	50 - 65	16
4	56 - 71	16	66 - 81	16
5	72 - 87	16	—	—
6	88 - 103	16	—	—
7	104 - 119	16	—	—

Tabelle 3.3: Gapaufteilung in Segmente der Kalorimeter FB2E und BBE

## Kapitel 4

# Bestimmung der mechanischen Parameter der Normplatten

Um die individuelle Eichung jedes Kanals zu ermöglichen, ist die genaue Bestimmung aller Parameter notwendig, die die Schauerentwicklung beeinflussen. In diesem Kapitel werden als erstes die Eigenschaften der in den Kalorimeterplatten verwendeten Materialien bestimmt.

Von den vielen mechanischen Parametern dieser Materialien sind vor allem die Dicke des Bleis und des G10 für die Schauerentwicklung relevant. Das Blei wird als Absorber benutzt, über 75% der Energie werden dort deponiert. Nach dem Blei trägt das G10 am meisten zur Plattendicke bei und, vom Blei abgesehen, wird innerhalb der Platten der größte Anteil der Energie im G10 deponiert. Deswegen werden diese beiden Werte bei der Bestimmung einer „Durchschnittsplatte“ nicht durch Mittelwertbildung über eine begrenzte Stichprobe bestimmt, sondern durch Anpassung an die mittlere Masse und Dicke sämtlicher produzierter Platten. Die so bestimmte „Durchschnittsplatte“ wird im Folgenden als Normplatte bezeichnet.

### 4.1 Die mechanischen Eigenschaften der verwendeten Materialien

Die meisten Flächen der verwendeten Materialien sind nicht gemessen, sondern aus den Maßen der Konstruktionszeichnungen berechnet worden. In der Tabelle 4.1 sind die berechneten Flächen der einzelnen Materialien zusammengestellt. Wenn Flächen durch Messungen bestimmt wurden, wird es im folgenden Text explizit erwähnt.

Zunächst werden die mechanischen Eigenschaften der einzelnen Komponenten einer FB2E-Ausleseplatte beschrieben:

Material	Fläche ( $cm^2$ )			
	FB2E-ROB	FB2E-HVB	BBE-ROB	BBE-HVB
Bleiplatte	1990	1990	1857	1857
Prepreg	2265	2265	1972	1972
Kupfer	2160	2269	1854	1975
G10-Platte	2278	2273	1979	1979
Kapton	—	2269	—	1972
HRC	—	2160	—	1854

Tabelle 4.1: Aus den Konstruktionszeichnungen berechnete Flächen der einzelnen Materialien. Die Fehler der angegebenen Flächen betragen aufgrund der Genauigkeit der Maßangaben  $\pm 2 \text{ cm}^2$ .

- Die **Bleiplatte** besteht aus einer Blei-Antimonlegierung (PbSb). Zu Beginn der Produktion enthielt die Legierung 3% Antimon, was einer Dichte von  $11.10 \text{ g/cm}^3$  entspricht. Während der Produktion der FB2E-Bleiplatten wurde die Legierung aus verarbeitungstechnischen Gründen gewechselt, der Antimonanteil betrug seitdem 1.5%, wodurch sich die Dichte der Legierung auf  $11.22 \text{ g/cm}^3$  erhöhte [SCHMITZ]. Die Werte für die Dichte sind durch Interpolation zwischen vier bekannten Dichten (Tabelle 4.2) bestimmt worden. Zur Verifizierung des Antimonanteils wurden sowohl Dichtebestimmungen mit einem Pyknometer<sup>1</sup> als auch chemische Analysen [WEGE90] durchgeführt. Als Probenmaterial dienten eine FB2E- und zwei BBE-Bleiplatten. Die Ergebnisse der Messungen entsprechen einem Anteil von 1.3% bis 1.5%. Wie genau die Legierung eingehalten wurde, ist nicht feststellbar. Von der Änderung der Legierung sind nur die FB2E-Bleiplatten betroffen. Von dem Verhältnis der Anzahl der Bleiplatten mit den verschiedenen Legierungen ist nur bekannt, daß der Anteil der beiden Legierungen mindestens 25% beträgt. Deswegen wird hier für die weiteren Bestimmungen ein Antimonanteil von 2.25% für FB2E benutzt, was einem Verhältnis von 1:1 der beiden Legierungen entspricht, die Unsicherheit des Antimonanteils liegt in der Größenordnung von 0.5%.

Für die Herstellung der reinen Bleiplatte galt die Dickenvorgabe von  $2375 \pm 25 \mu\text{m}$  [SCHMITZ]. Die Oberflächen der Platten sind durch Sandstrahlen aufgeraut und mit Primer, einem Epoxydharz, beschichtet, damit die Klebung auf der Oberfläche besser haften kann. Die mittlere Dicke von fünf Bleiplatten ist mit der Dickenmeßapparatur (siehe Kapitel 5.1) an jeweils 24 Meßpunkten pro Platte zu  $2.45 \pm 0.3 \text{ mm}$  bestimmt worden. Die Bleiplatten stammen allerdings aus der letzten Phase der Produktion, die geringfügig dickere Platten enthielt. Die Variation der Dicke der einzelnen Platten beträgt im Mittel aber nur  $7 \mu\text{m}$ , und somit können die Bleiplatten

<sup>1</sup>Ein Pyknometer ist ein Gefäß mit sehr genau bekannten Volumen. Das für die Meßung verwendete Pyknometer hat ein Volumen von  $24.683 \pm 0.001 \text{ cm}^3$ .

Bezeichnung	Antimonanteil (%)	Dichte ( $g/cm^3$ )
Pb	0	11.35
PbSb1	1	11.26
PbSb2	2	11.18
PbSb4	4	11.03

Tabelle 4.2: Dichte von verschiedenen Blei-Antimonlegierungen nach [BLEI]

als flach angesehen werden und es reicht aus, die Dicke durch Angabe eines Mittelwertes über die ganze Plattenfläche anzugeben. Die Dicke der Aufrauhung und des Primers schwankt zwischen 20 und 30  $\mu m$  nach [SCHMITZ], die Dichte und somit auch die Masse kann nur abgeschätzt werden. Der Primer ist ein Epoxydharz und die Dichte dürfte daher im Bereich derjenigen von Epoxydharz liegen, wahrscheinlich höher, da die Aufrauhung des Bleis mitbetrachtet wird. Daher wird die Dicke mit 25  $\mu m$  und die Dichte mit 2.0  $g/cm^3$  abgeschätzt. Die Unsicherheiten in der Dicke und Dichte des Primers werden bei der Anpassung der Blei- und G10-Dicken mitberücksichtigt.

- Die **Aluminiumringe** haben einen Innendurchmesser von 8  $mm$  und einen Außendurchmesser von 20  $mm$ , was einer Fläche von 2.64  $cm^2$  entspricht. Zur Bestimmung der Dicke und Masse sind 10 Stichproben an 9 Ringe gemessen worden. Der Mittelwert der Dicke ist  $2.38 \pm 0.02 mm$  und der Masse  $1.70 \pm 0.01 g$ . Für die Dichte des Aluminiums erhält man daraus einen Wert von  $2.71 \pm 0.01 g/cm^3$ .
- Die **G10-Streifen** befinden sich im Presamplerbereich in den Ecken der Platten. Von einer Stichprobe mit fünf Streifen sind folgende Mittelwerte gemessen worden: Länge  $40 \pm 2 mm$ , Breite  $18.7 \pm 0.5 mm$  und Höhe  $2.35 \pm 0.01 mm$ . Das verwendete G10 ist von der gleichen Sorte wie die G10-Streifen der Hochspannungsplatten und besitzt deshalb auch die gleiche Dichte von  $2.02 \pm 0.01 g/cm^3$ . Die daraus resultierende Masse beträgt  $3.6 \pm 0.2 g$ .
- Zwei Schichten **Prepreg** werden auf beide Seiten der Bleiplatte geklebt. Die Dichte und Dicke von Prepreg nach dem Kleben und Pressen ist von dem Hersteller für jede gelieferte Rolle angegeben worden. Die Mittelung über alle Rollen ergibt  $1.70 \pm 0.01 g/cm^3$  für die Dichte und  $130 \pm 5 \mu m$  für die Dicke. Da aber zwei Lagen aufeinander geklebt werden, kann das flüssige Harz leichter herausfließen, so daß die Dicke der zwei Lagen zusammen geringer ist. Diese ist mit 250  $\mu m$  für zwei Lagen beziehungsweise 125  $\mu m$  für eine Lage abgeschätzt worden.
- Das **Kupfer** befindet sich auf beiden Seiten der G10-Platte. Am Rand der G10-

Platte, bei den Löchern und an der Nase befindet sich kein Kupfer, daher kann in diesen Bereichen die Kupferdicke direkt gemessen werden. Die Kupferdicke ist bei denselben G10-Platten bestimmt worden, die zur Bestimmung der Dicke des G10 ausgesucht worden sind. Die mittlere Dicke beträgt  $55 \pm 2 \mu\text{m}$ , die Dichte von  $8.96 \text{ g/cm}^3$  stammt aus einer Tabelle [PART90], daraus ergibt sich eine Masse von  $106 \pm 4 \text{ g}$ .

- Die zur Produktion verwendeten **G10-Platten** bestehen aus mindestens drei verschiedenen G10-Sorten. Zur Dicken- und Dichtebestimmung ist eine Stichprobe von fünf Platten ausgesucht worden, in dem möglichst alle Sorten von G10 vorkommen. Die Dicke der Platten ist mit der Dickenmeßapparatur an jeweils 24 Punkten gemessen worden. Nach Abzug der Kupferdicke ergibt sich ein Mittelwert von  $689 \pm 21 \mu\text{m}$ . Die Masse aller fünf Platten zusammen, inklusive Kupfer, beträgt  $2236 \pm 2 \text{ g}$ . Bei Hinzunahme der Meßwerte für die G10-Platten der Hochspannungsplatten und Mittelung entspricht das einer Dichte von  $1.55 \pm 0.05 \text{ g/cm}^3$ . Da keine Norm existiert, wie groß der Glasanteil von G10 sein muß, sind die Unterschiede in der Dichte der G10-Platten zu derjenigen der G10-Streifen nicht ungewöhnlich. Eine G10-Platte besteht nach [PART90] aus 60%  $\text{SiO}_2$  und 40% Epoxydharz bei einer Dichte von  $1.7 \text{ g/cm}^3$ .
- Zur Masse der Ausleseplatte tragen außerdem zwei Stecker, zwei Erdungsdrähte, zwei Erdkontakte und das Lötzinn mit  $10 \pm 1 \text{ g}$  bei, die durch Wägung ermittelt wurden.

Bei der folgenden Beschreibung der Komponenten der FB2E-Hochspannungsplatte wird im Wesentlichen nur auf die Unterschiede zur Ausleseplatte eingegangen. Alle nicht erwähnten Daten entsprechen den dort genannten.

- Die **Bleiplatte** und die **Aluminiumringe** sind die gleichen wie für eine Ausleseplatte.
- Ein langer und ein kurzer **G10-Streifen** füllen den gesamten Presamplerbereich, abgesehen von einem schmalen Schlitz für den Erdungsdraht der Bleiplatte. Es sind jeweils drei Streifen vermessen worden. Die gemittelte Länge des langen Streifen ist  $735 \pm 1 \text{ mm}$ , des kurzen  $76 \pm 1 \text{ mm}$ , während die mittlere Breite mit  $19 \pm 0.5 \text{ mm}$  und Dicke mit  $2.35 \pm 0.01 \text{ mm}$  bei beiden Streifenarten gleich ist. Mit Hilfe einer Wägung ist die Dichte für jeden Streifen separat bestimmt worden, der Mittelwert beträgt  $2.02 \pm 0.01 \text{ g/cm}^3$ .
- Das **Prepreg** wird auf beide Seiten der kupferbeschichteten G10-Platte geklebt. Die Dicke nach der Klebung beträgt laut Hersteller  $130 \mu\text{m}$ . Alle anderen Daten sind wie bei der Ausleseplatte.

- Das **Kupfer** bedeckt bis auf ein  $4 \text{ cm}^2$  großes Gebiet an der Nase die G10-Fläche. Die Dicke ist nach der mechanischen Entfernung von Teilen der Kupferschicht direkt mit der Dickenmeßapparatur für die Plattendicke zu  $35 \pm 2 \mu\text{m}$  bestimmt worden. Die Masse einer Kupferschicht beträgt somit  $71 \pm 4 \text{ g}$ .
- Die mittlere Dicke der **G10-Platte** ist  $735 \pm 13 \mu\text{m}$ , gemessen bei fünf Platten, die nach dem gleichen Verfahren wie bei den Ausleseplatten selektiert wurden. Die Masse aller fünf Platten inklusive Kupferbeschichtung beträgt  $2014 \pm 2 \text{ g}$ . Innerhalb der Fehlergrenzen haben die kupferbeschichteten G10-Platten der Hochspannungs- und Ausleseplatten die gleiche Dicke.
- Das **Kapton** ist eine hochspannungsfeste Polyamidfolie. Die Dichte von  $1.42 \text{ g/cm}^3$  und Dicke von  $75 \mu\text{m}$  sind Herstellerangaben. Eine Kaptonschicht hat daher eine Masse von  $24 \text{ g}$ .
- Das **HRC** ist eine Mischung von Epoxydharz und Graphit. Die Dichte von  $1.2 \text{ g/cm}^3$  und Dicke von  $30 \mu\text{m}$  sind von [KOLA90], der die Hochspannungsplatten mit HRC beschichtet hat, bestimmt worden. Damit ergibt sich eine Masse von  $8 \text{ g}$  pro HRC-Schicht.
- Weiterhin tragen vier Anschlußpins, zwei Erdkontakte, ein Widerstand und Lötzinn mit zusammen  $5 \pm 0.5 \text{ g}$  zur Masse der Platte bei. Die Masse ist durch Wägung bestimmt worden.

Vom Aufbau her sind die FB2E- und BBE-Kalorimeterplatten im Wesentlichen gleich. Weil BBE-Kalorimeterplatten keinen Presampler haben, fehlen die G10-Streifen, die Bleiplatte geht überall bis auf  $4 \text{ mm}$  an den Rand heran. Die Unterschiede der einzelnen Komponenten im Vergleich zu den entsprechenden der FB2E-Kalorimeterplatten sind im Folgenden aufgeführt:

- Für alle **Bleiplatten** ist eine  $1.5\%$  Blei-Antimon Legierung verwendet worden, die Dichte der Legierung beträgt damit  $11.22 \text{ g/cm}^3$ .
- Es sind **Aluminiumringe** aus einer anderen Produktion mit einer Dichte von  $2.80 \pm 0.01 \text{ g/cm}^3$  und einer Dicke von  $2.38 \pm 0.01 \text{ mm}$  verarbeitet worden. Diese Werte sind mit dem gleichen Verfahren wie bei den FB2E-Aluminiumringen bestimmt worden.
- Beim **Pregpreg** und **Kupfer** gibt es keine Unterschiede zu den entsprechenden Materialien der FB2E-Kalorimeterplatten.
- Die G10-Platte der Ausleseplatten hat eine mittlere Dicke von  $707 \pm 12 \mu\text{m}$ , der Hochspannungsplatten von  $727 \pm 13 \mu\text{m}$ . Die mittlere Dichte beider Plattensorten ist  $1.50 \pm 0.05 \text{ g/cm}^3$ . Diese Werte sind nach demselben Verfahren wie bei den FB2E-Kalorimeterplatten bestimmt worden.

Medium	Dichte ( $\frac{g}{cm^3}$ )	$X_0$ (cm)	$\frac{dE}{dx}_{min}$ ( $\frac{MeV}{cm}$ )	$\epsilon$ (MeV)	$R_m$ (cm)
PbSbmix	11.16	0.57	12.54	7.20	1.68
fl. Argon	1.40	13.96	2.11	29.46	9.95
G10	1.55	21.29	2.87	61.10	7.32
Prepreg	1.70	18.54	3.11	57.65	6.75
Kapton	1.42	28.54	2.63	75.06	7.99
HRC	1.22	35.01	2.36	82.62	8.90
Primer	2.00	7.58	7.81	59.19	2.69
Kupfer	8.96	1.44	12.90	18.58	1.63

Tabelle 4.3: Die Dichte, Strahlungslänge  $X_0$ , Energieverlust eines minimal ionisierenden Teilchens  $dE/dx_{min}$ , kritische Energie  $\epsilon$  und der Molière Radius  $R_m$  der beim Bau der FB2E-Kalorimeterplatten verwendeten Materialien. (nach [ELLE91])

- Die Masse der Stecker beträgt  $5 \pm 1$  g bei den Ausleseplatten und  $3 \pm 0.5$  g bei den Hochspannungsplatten.

In der Tabelle 4.3 sind die materialabhängigen Schauergrößen für die verwendeten Materialien aufgelistet. Die Tabelle ist mit Monte-Carlo Rechnungen des Programms PEGS bestimmt worden. Nähere Angaben dazu finden sich in [ELLE91].

## 4.2 Bestimmung der Norm-Blei- und G10-Dicken

Mit den Daten der einzelnen Komponenten kann nun eine Kalorimeterplatte konstruiert werden und zum Beispiel die Dicke und Masse der Kalorimeterplatte bestimmt werden. Einzelne Daten, vor allem bei der Blei- und G10-Platte, sind nur von einer sehr geringen Stückzahl gemessen, und unterliegen zum Teil wie die gemessene Dicke der Bleiplatten, die ja an geringfügig dickeren Bleiplatten bestimmt wurde, besonderen Einschränkungen. Andererseits ist von allen Kalorimeterplatten die Masse und die Dicke gemessen worden. Die Mittelwerte und ihre Standardabweichung sind in Tabelle 4.2 angegeben. Da vor allem die Blei- und G10-Dicke für die Schauerentwicklung relevant sind, ist es sinnvoll, diese mit der mittleren Dicke und Masse und den Daten der anderen Komponenten zu bestimmen, um einen Parametersatz zu erhalten, der die „gemittelte Platte“, die Normplatte, beschreibt. Für die FB2E- und BBE-Kalorimeterplatten erhält man jeweils vier Gleichungen für 3 Variablen, weil die Bleidicke für Auslese- und Hochspannungsplatten gleich ist.

$$\begin{aligned}
\underline{d_{Pb}} + 2 * \underline{d_{G10-ROB}} + 2 * d_{Pri/Aufr.} + 4 * d_{Cu-ROB} + 4 * d_{Prep.-ROB} &= d_{ROB} \\
\underline{d_{Pb}} + 2 * \underline{d_{G10-HVB}} + 2 * d_{Pri/Aufr.} + 4 * d_{Cu-HVB} + 4 * d_{Prep.-HVB} \\
&+ 2 * d_{Kapton} + 2 * d_{HRC} = d_{HVB} \\
\underline{d_{Pb}} * \rho_{Pb} * f_{Pb} + 2 * \underline{d_{G10-ROB}} * \rho_{G10} * f_{G10} + m_{Pri/Aufr.} + 9 * m_{Ring} \\
+ 2 * m_{G10-Streifen} + 4 * m_{Prep.-ROB} + 4 * m_{Cu-ROB} + m_{Steck.-ROB} &= m_{ROB} \\
\underline{d_{Pb}} * \rho_{Pb} * f_{Pb} + 2 * \underline{d_{G10-HV}} * \rho_{G10} * f_{G10} + m_{Pri/Aufr.} + 9 * m_{Ring} \\
+ m_{G10-l.Str.} + m_{G10-k.Str.} + 4 * m_{Prep.-HVB} + 4 * m_{Cu-HVB} + m_{Steck.-HVB} &= m_{HVB}
\end{aligned}$$

Die unterstrichenen Terme sind die zu bestimmenden Variablen,  $d$  bedeutet die Dicke,  $\rho$  die Dichte,  $f$  die Fläche und  $m$  die Masse der entsprechenden Komponente. Auf der rechten Seite der Gleichungen stehen die vier Mittelwerte, im folgenden auch als Referenzwerte bezeichnet. Das Gleichungssystem ist überbestimmt, und für die gegebenen Werte nicht exakt lösbar. Zur Bestimmung der Variablen wird daher die Routine MINSQ (D507) aus [CERNLIB] verwendet. MINSQ bestimmt das Minimum einer Summe von Quadraten von Funktionen:

$$\phi(x_1, x_2 \dots x_n) = \sum_{k=1}^m \{f_k(x_1, x_2 \dots x_n)\}^2 \quad (m \geq n \geq 2)$$

$n = 3$  ist die Anzahl der Variablen und  $m = 4$  die Anzahl der Funktionen. Jede Funktion entspricht einer Gleichung des Gleichungssystems und gibt als Funktionswert die relative Differenz von der berechneten Dicke oder Masse, also der linken Seite des Gleichungssystems, und dem auf der rechten Seite des Gleichungssystems stehenden Referenzwertes zurück.

Zur Kontrolle, ob dieses Verfahren zu sinnvollen Ergebnissen führt, sind bestimmte Werte (siehe Abbildung 4.1) nicht fest vorgegeben, sondern variiert worden. Vor jeder Anpassung sind die variierten acht Parameter mit normalverteilten Zufallszahlen um ihren Mittelwert unter Berücksichtigung der Fehler erzeugt worden. Abbildung 4.2 zeigt die Verteilungen dieser Werte für insgesamt 10000 Anpassungen der FB2E-Parameter, Abbildung 4.3 die Verteilungen der bestimmten Blei- und G10-Dicken mit angepaßten Gaußfunktionen. Die angepaßten Blei- und G10-Dicken stimmen sehr gut mit den gemessenen Blei- und G10-Dicken überein, die Differenzen sind kleiner als die Fehler der gemessenen Dicken.

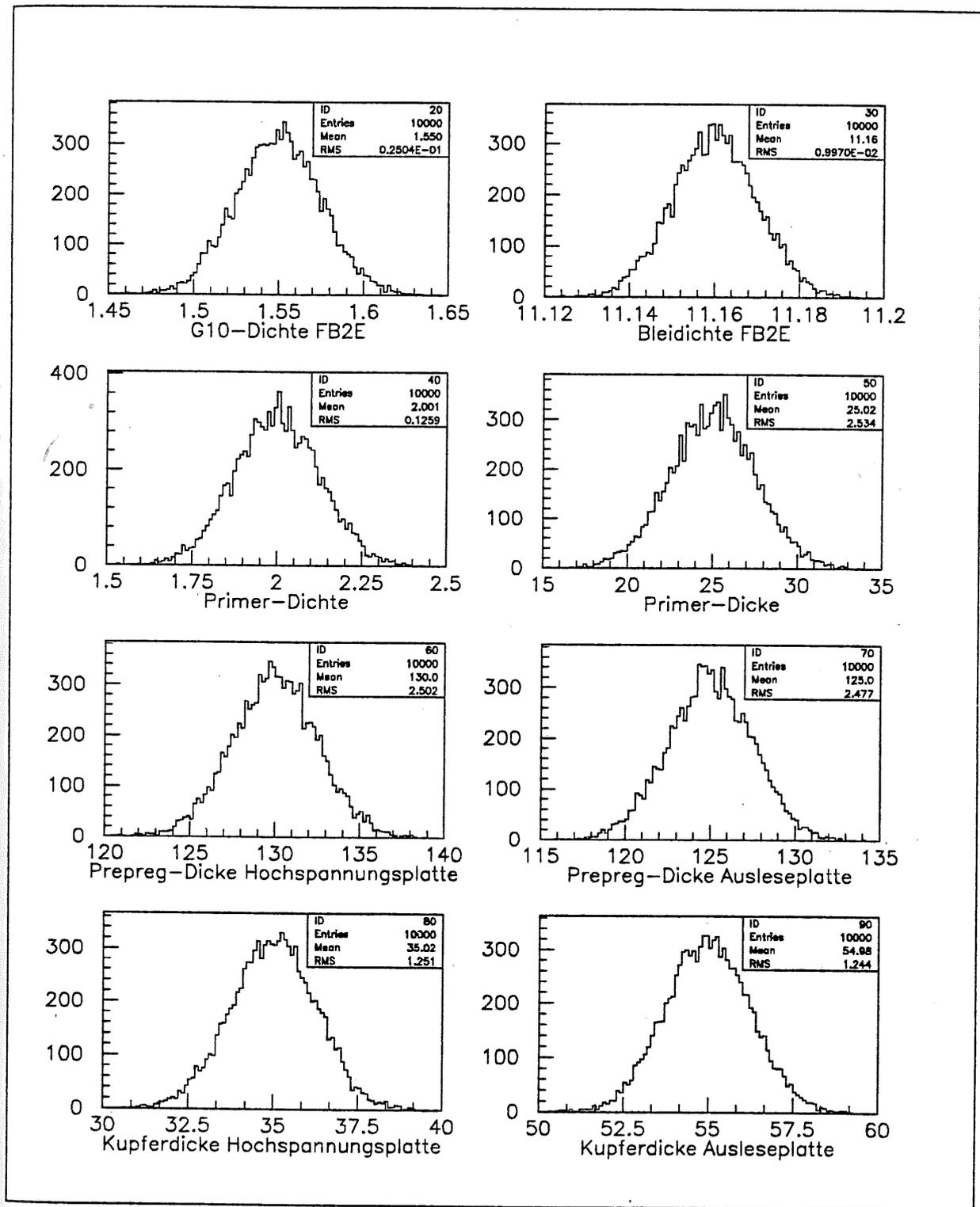


Abbildung 4.1: Die Verteilungen der für die Bestimmung der Blei- und G10-Dicke benutzten Materialparameter. Die Dichte ist auf der X-Achse in  $g/cm^3$ , die Dicke in  $\mu m$  angegeben, auf der Y-Achse die Anzahl der Einträge. Die abgebildeten Verteilungen sind bei der Anpassung der Normparameter für das FB2E-Kalorimeter verwendet worden.

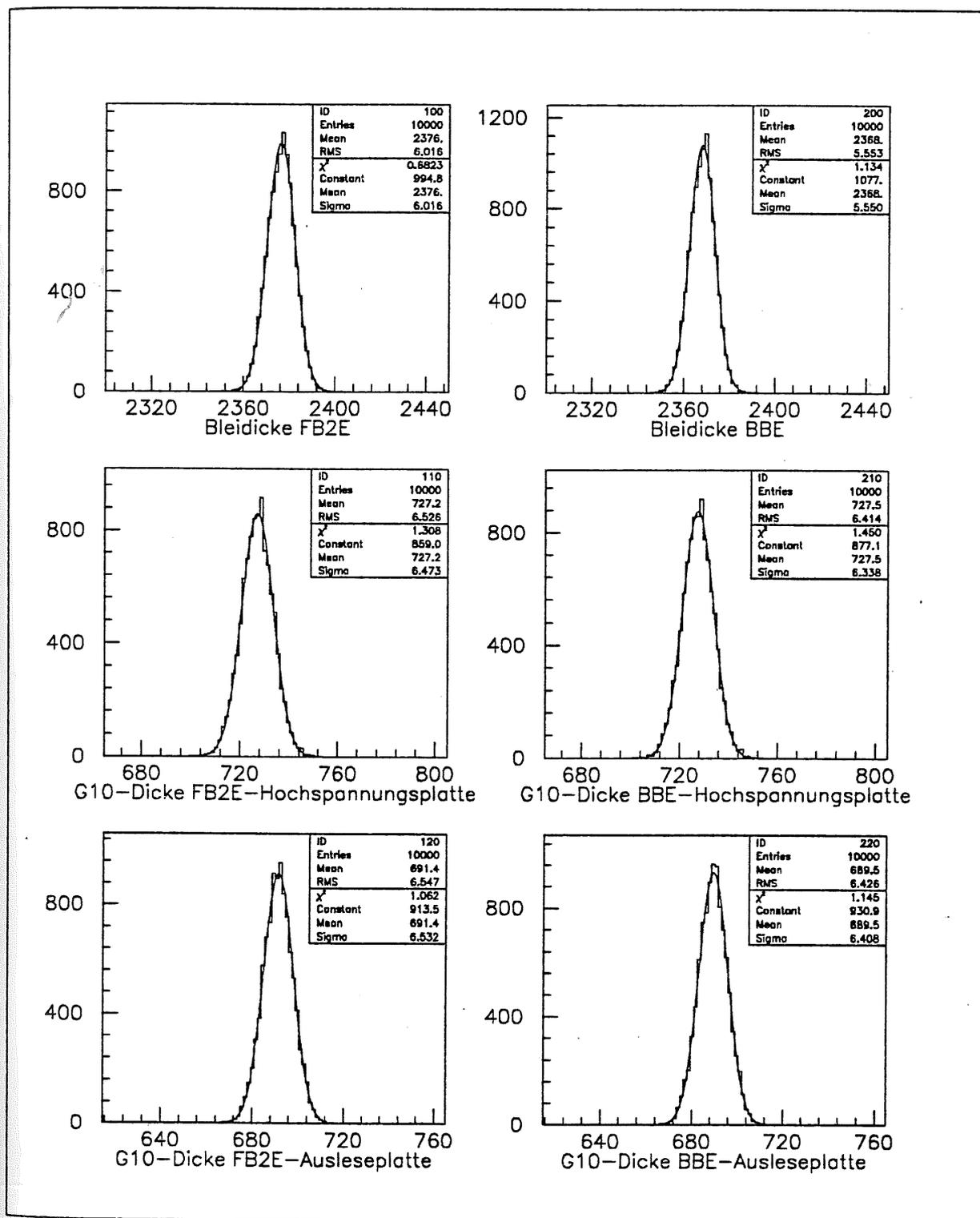


Abbildung 4.2: Die Verteilungen der bestimmten Blei- und G10-Dicken für FB2E und BBE. Die X-Achse gibt die Dicke in  $\mu\text{m}$  an, die Y-Achse die Anzahl der Einträge.

### 4.3 Die Parameter der Normplatten

In den folgenden vier Tabellen 4.5 bis 4.8 werden alle relevanten mechanischen Daten der Normplatten zusammengefaßt. Bei der Blei- und der G10-Dicke sind die angepaßten Werte verwendet worden. In der Zeile *Summe* ist die Dicke und die Masse der Platte angegeben, wenn die Dicken und Massen aller einzelner Komponenten aufaddiert werden<sup>2</sup>. In der Zeile *Referenz* sind als Vergleich die mittlere Dicke und Masse aller produzierten Platten der angegebenen Plattenart aufgeführt. Die Abweichungen in der Dicke zwischen *Summe* und *Referenz* sind sehr gering und liegen bei allen vier Plattenarten unterhalb von 0.1 %. Bei der Masse sind die Abweichungen insbesondere bei den BBE-Kalorimeterplatten größer, liegen aber immer noch unterhalb von 0.3 %. Die Anpassung kann daher für alle Plattenarten als sehr gut betrachtet werden.

---

<sup>2</sup>Die Gesamtdicke und Masse sind mit den nicht gerundeten Werten bestimmt worden

Kalorimeterplatte	Dicke ( $\mu\text{m}$ )	Masse (g)
FB2E-Ausleseplatte	4530 $\pm$ 60	6434 $\pm$ 57
FB2E-Hochspannungsplatte	4750 $\pm$ 41	6457 $\pm$ 40
BBE-Ausleseplatte	4518 $\pm$ 40	5899 $\pm$ 46
BBE-Hochspannungsplatte	4740 $\pm$ 50	5898 $\pm$ 61

Tabelle 4.4: Tabelle mit den mittleren Plattendicken und -massen sowie den zugehörigen Standardabweichungen für FB2E und BBE. Die Daten stammen aus [H1M05] und [KORN91].

Material	Anzahl	Dichte ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )	Dimensionen	Beitrag zur Dicke ( $\mu\text{m}$ )	Masse (g)
			Dicke x Fläche ( $\mu\text{m}$ ) x ( $\text{cm}^2$ )		
<u>Blei-Platte PbSbmix</u>	1	11.16	<u>2377</u> x 1990	2377	5279.
Primer/Pb-Aufrauhung	2	2.0	25 x 1990	50	20.
Al-Ring	9	2.71	2380 x 2.64	—	15.3
G10-Streifen	2	2.02	2350 x 7.48	—	7.1
Prepreg	4	1.7	125 x 2265	500	192.
Kupfer	4	8.96	55 x 2160	220	426.
<u>G10-Platte</u>	2	1.55	<u>691</u> x 2278	1382	488.
Stecker	1	—	—	—	10.
			Summe	4529	6437.
			Referenz	4530	6433.

Tabelle 4.5: Die Normparameter einer FB2E-Ausleseplatte. Die unterstrichenen Werte sind durch Anpassung an die Referenzwerte bestimmt worden.

Material	Anzahl	Dichte ( $g/cm^3$ )	Dimensionen	Beitrag	Masse (g)
			Dicke x Fläche ( $\mu m$ ) x ( $cm^2$ )	zur Dicke ( $\mu m$ )	
<u>Blei-Platte PbSbmix</u>	1	11.16	<u>2377</u> x 1990	2377	5279.
Primer/Pb-Aufrauhung	2	2.0	25 x 1990	50	20.
Al-Ring	9	2.71	2380 x 2.64	—	15.3
langer G10-Streifen	1	2.02	2350 x 137	—	65.4
kurzer G10-Streifen	1	2.02	2350 x 14	—	6.8
Prepreg	4	1.7	130 x 2265	520	200.2
Kupfer	4	8.96	35 x 2269	140	285.
<u>G10-Platte</u>	2	1.55	<u>727</u> x 2273	1454	512.
Kapton	2	1.42	75 x 2269	150	48.
HRC	2	1.2	30 x 2160	60	16.
Stecker	1	—	—	—	5.
Summe				4751	6453.
Referenz				4750	6457.

Tabelle 4.6: Die Normparameter einer FB2E-Hochspannungsplatte. Die unterstrichenen Werte sind durch Anpassung an die Referenzwerte bestimmt worden.

Material	Anzahl	Dichte ( $g/cm^3$ )	Dimensionen	Beitrag	Masse (g)
			Dicke x Fläche ( $\mu m$ ) x ( $cm^2$ )	zur Dicke ( $\mu m$ )	
<u>Blei-Platte PbSb1.5</u>	1	11.22	<u>2368</u> x 1857	2367	4934.
Primer/Pb-Aufrauhung	2	2.0	25 x 1857	50	18.6
Al-Ring	9	2.80	2380 x 2.64	—	15.8
Prepreg	4	1.7	125 x 1972	500	168.
Kupfer	4	8.96	55 x 1854	220	366.
<u>G10-Platte</u>	2	1.50	<u>690</u> x 1979	1380	409.
Stecker	1	—	—	—	5.
Summe				4517	5916.
Referenz				4520	5899.

Tabelle 4.7: Die Normparameter einer FB2E-Hochspannungsplatte. Die unterstrichenen Werte sind durch Anpassung an die Referenzwerte bestimmt worden.

Material	Anzahl	Dichte ( $g/cm^3$ )	Dimensionen	Beitrag zur Dicke ( $\mu m$ )	Masse ( $g$ )
			Dicke x Fläche ( $\mu m$ ) x ( $cm^2$ )		
<u>Blei-Platte PbSb1.5</u>	1	11.22	<u>2368</u> x 1857	2367	4934.
Primer/Pb-Aufrauhung	2	2.0	25 x 1990	50	18.6
Al-Ring	9	2.80	2380 x 2.64	—	15.8
Prepreg	4	1.7	130 x 1972	520	174.
Kupfer	4	8.96	35 x 1975	140	248.
<u>G10-Platte</u>	2	1.50	<u>728</u> x 1979	1456	432.
Kapton	2	1.42	75 x 1972	150	42.
HRC	2	1.2	30 x 1854	60	14.
Stecker	1	—	—	—	3.
Summe				4743	5881.
Referenz				4740	5898.

Tabelle 4.8: Die Normparameter einer BBE-Hochspannungsplatte. Die unterstrichenen Werte sind durch Anpassung an die Referenzwerte bestimmt worden.

## Kapitel 5

# Messung der Plattendicken und Gapbreiten

Um die Plattendicke und die Gapbreite über der gesamten Fläche mit Hilfe von Inter- und Extrapolationsmethoden mit einiger Genauigkeit bestimmen zu können, ist eine größere Anzahl von Meßpunkten notwendig. Damit die Messungen nicht zuviel Zeit in Anspruch nehmen und gleichbleibende Genauigkeit der Messungen gewährleistet ist, sind spezielle Apparaturen für die Messungen der Plattendicke und der Gapbreite entwickelt worden.

Die Meßverfahren stammen für die Plattendicke aus [H1M05], für die Messung der Gapbreiten aus [H1M06,H1M07].

### 5.1 Die Messung der Plattendicken

Die Plattendicken sind mit drei verschiedenen Methoden gemessen worden. Der Apparat zur Dickenmessung wurde erst während der Produktion der FB2E-Kalorimeterplatten fertiggestellt, daher konnten nur 60% der produzierten FB2E-Kalorimeterplatten damit vermessen werden. Die anderen FB2E-Kalorimeterplatten sind mit zwei verschiedenen Verfahren für nur wenige Meßpunkte vermessen worden. Die Produktion der BBE-Kalorimeterplatten fand nach der FB2E-Produktion statt, weshalb die Plattendicke von allen produzierten BBE-Kalorimeterplatten mit der Apparatur bestimmt worden ist.

Im Folgenden werden die drei verschiedenen Meßmethoden beschrieben.

- Bei der **Sechspunktmessung** sind sechs Punkte pro Platte gemessen worden. Die Platten sind auf einer flachen Unterfläche angeedrückt und die Plattendicke ist an den in Tabelle 5.1 angegebenen Punkten mit einer digitalen Messuhr<sup>1</sup> mit einer

---

<sup>1</sup>Mitutoyo IDC 543

Meßpunkt	X-Position (cm)	Y-Position (cm)
1	-26.9	19.0
2	-26.9	6.0
3	-15.5	12.5
4	15.5	12.5
5	26.9	6.0
6	26.9	19.0

Tabelle 5.1: Die Positionen der Meßpunkte bei der Sechspunktmessung

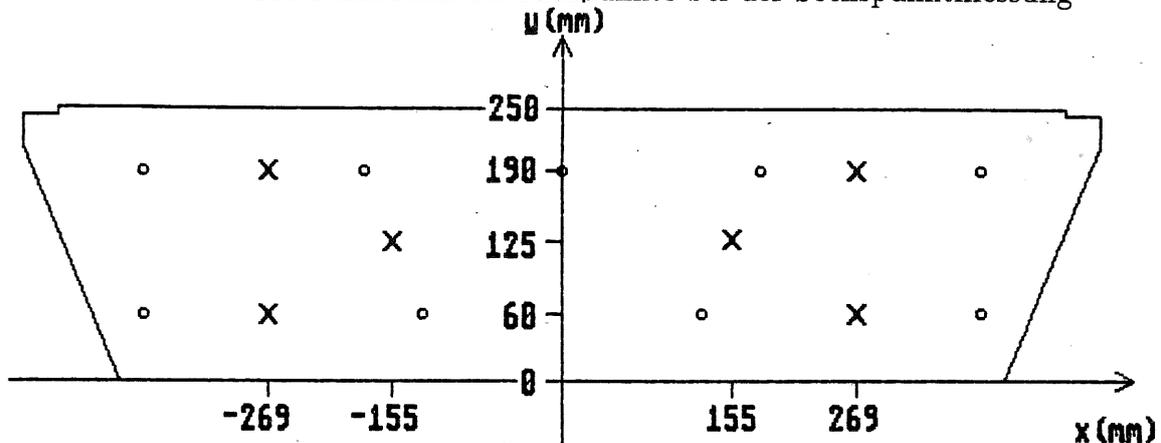


Abbildung 5.1: Die Lage der Meßpunkte bei der Sechspunktmessung

Auflösung von  $1 \mu\text{m}$  bestimmt worden. In Abbildung 5.1 ist die Position der Meßpunkte auf der Plattenfläche dargestellt. Insgesamt sind mit dieser Methode 276 Hochspannungsplatten und 215 Ausleseplatten des FB2E-Kalorimeters vermessen worden.

- Die **Neunpunktmessung** ist nur bei 12 FB2E-Kalorimeterplatten ohne Bleiabsorber angewendet worden. Die neun Meßpunkte liegen alle an dem Rand der Platten, weil die Dicke mit einer Mikrometerschraube bestimmt worden ist. Die Position der Meßpunkte ist in Abbildung 5.2 dargestellt.
- Die als **Maschinenmessung** bezeichnete Methode benutzt zur Messung einen spe-

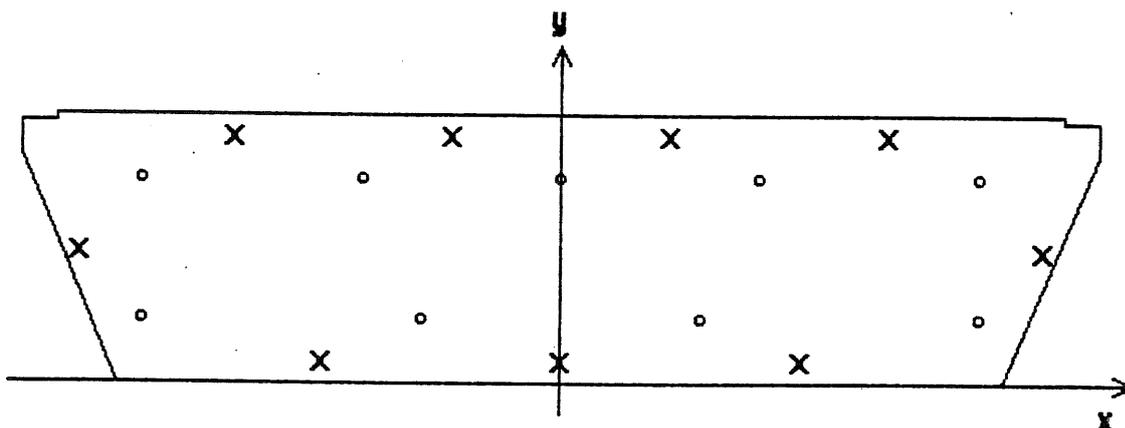


Abbildung 5.2: Die Lage der Meßpunkte bei der Neunpunktmessung.

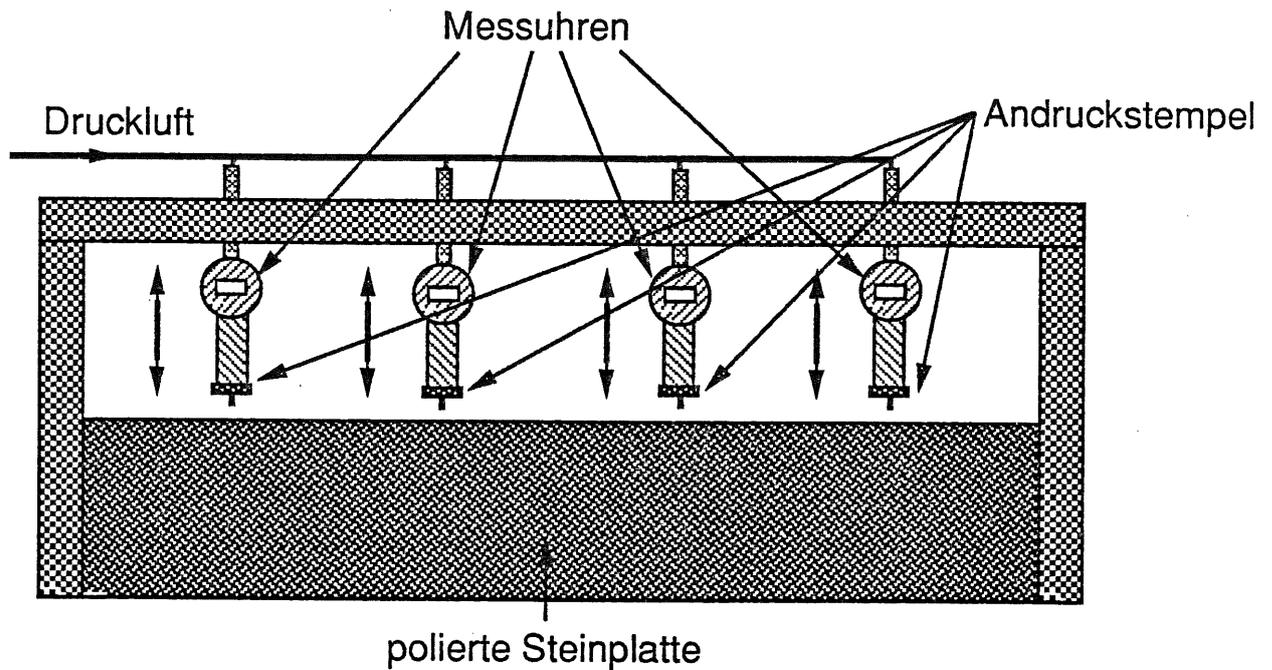


Abbildung 5.3: Schematische Darstellung der Dickenmeßapparatur

ziell dafür gebauten Apparat, im folgenden Dickenmeßapparatur genannt [H1M05]. Die Abbildung 5.3 zeigt den schematischen Aufbau der Dickenmeßapparatur. Die zu messenden Platten werden auf eine polierte Steinplatte gelegt, die bis auf  $3\ \mu\text{m}$  genau eben ist. An einem Rahmen sind vier Messuhren des bei der Sechspunktmessung verwendeten Typs befestigt. Per Druckluft wird die Platte durch die runden Andruckstempel rund um die vier Meßfühler der Meßuhren mit einer Kraft von  $140\ \text{N}$  angepresst. Die Meßwerte der Meßuhren werden mittels eines IEEE-Interfaces direkt in einen Rechner eingelesen. Die X-Position der Messungen ist durch die feste Montierung der Messuhren an den Rahmen festgelegt. Die Platten werden in Y-Richtung unter den Messuhren durchgeschoben und in Abständen von  $1\ \text{cm}$  gemessen. Die Genauigkeit der Positionierung in Y-Richtung liegt bei  $1\ \text{mm}$ , die Genauigkeit der Messung der Plattendicken beträgt  $3\ \mu\text{m}$ .

In den Tabellen 5.2 und 5.3 sind die Positionen der Meßpunkte angegeben und in Abbildung 5.4 dargestellt.

Bei den FB2E-Hochspannungsplatten und den FB2E-Kalorimeterplatten ohne Bleiabsorber sind 96 Punkte pro Platte gemessen worden, bei den FB2E-Ausleseplatten sind es 92 Punkte und bei allen BBE-Kalorimeterplatten 82 Punkte.

Die Anzahl der mit dieser Methode gemessenen Platten geht aus Tabelle 5.4 hervor.

In Abbildung 5.5 ist das Ergebnis der Dickenmessung für eine FB2E- und eine BBE-Kalorimeterplatte dargestellt. Die vier Meßlinien sind die Daten für die Inter- und Extrapolation der Plattendicke auf der gesamten Plattenfläche. Die Form der Variationen in der

Meßlinie	X-Position (cm)	Y-Position (cm)	
		HVB, HVB-NOPB, ROB-NOPB	ROB
1	-32.9	1,2,...,24	2,3,...,24
2	-9.9	1,2,...,24	2,3,...,24
3	9.9	1,2,...,24	2,3,...,24
4	32.9	1,2,...,24	2,3,...,24

Tabelle 5.2: Die Positionen der Meßpunkte bei der Bestimmung der Plattendicke von FB2E-Kalorimeterplatten mit der Dickenmeßapparatur.

Meßlinie	X-Position (cm)	Y-Position (cm)
1	-32.9	3,4,...,23
2	-9.9	6,7,...,25
3	9.9	6,7,...,25
4	32.9	3,4,...,23

Tabelle 5.3: Die Positionen der Meßpunkte bei der Bestimmung der Plattendicke von BBE-Kalorimeterplatten mit der Dickenmeßapparatur.

Plattenart	Anzahl FB2E	Anzahl BBE
Ausleseplatte	394	411
Hochspannungsplatte	326	418
Ausleseplatte ohne Bleiabsorber	30	23
Hochspannungsplatten ohne Bleiabsorber	59	47
Zusammen	809	899

Tabelle 5.4: Die Anzahl der einzelnen Plattenarten, die mit der Dickenmeßapparatur gemessen worden sind. In der zweiten Spalte stehen die Zahlen für die FB2E-Kalorimeterplatten, in der dritten Spalte diejenigen für die BBE-Kalorimeterplatten.

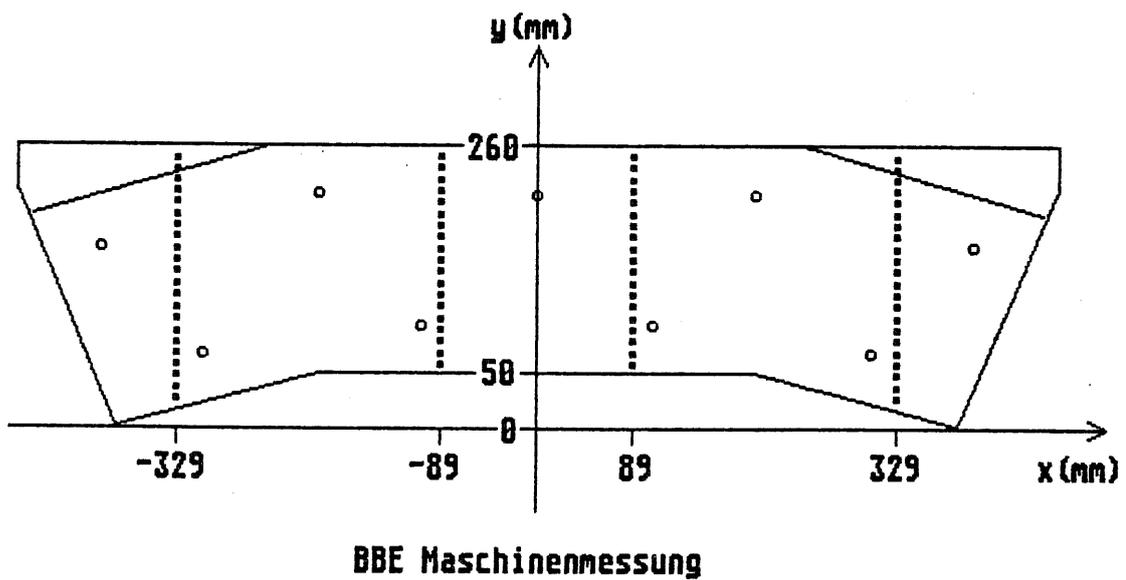
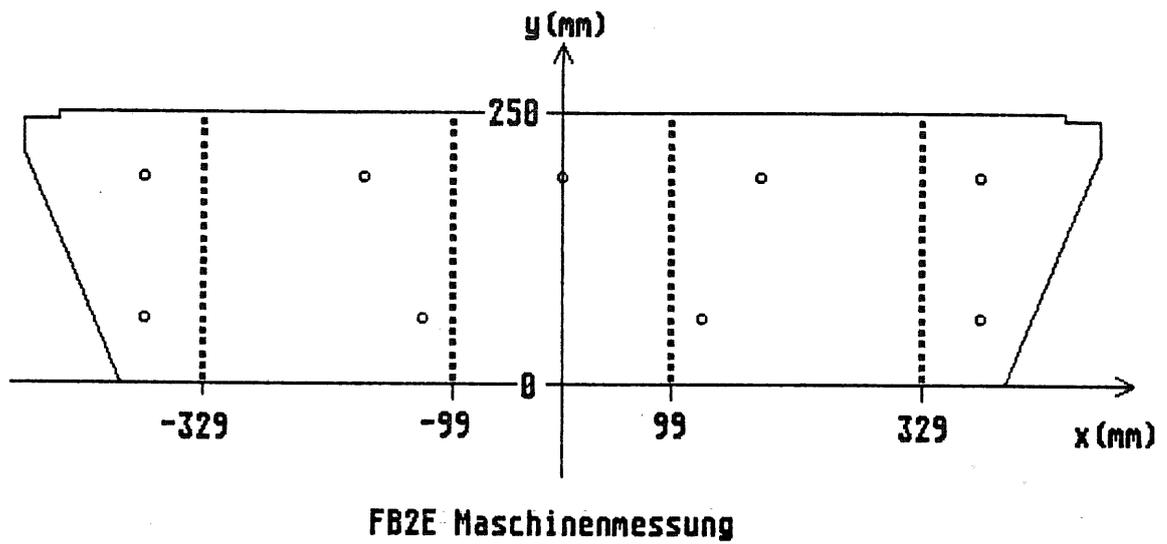


Abbildung 5.4: Die Positionen der Meßpunkte bei der Bestimmung der Plattendicke von FB2E- und BBE-Kalorimeterplatten mit der Dickenmeßapparatur.

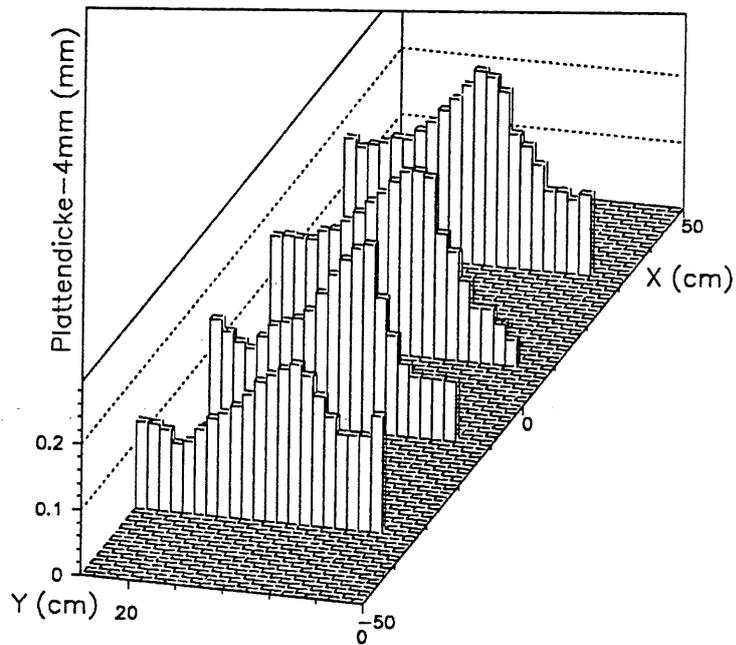
Plattendicke sind typisch für alle produzierten Platten und werden durch das Epoxydharz des Prepregs verursacht. Beim Pressen fließt das flüssige Epoxydharz nicht gleichmäßig heraus. In der Plattenmitte verbleibt mehr Epoxydharz als an den Rändern, wodurch die Plattendicke in der Mitte größer ist als an den Rändern der Platten.

## 5.2 Die Messung der Gapbreiten

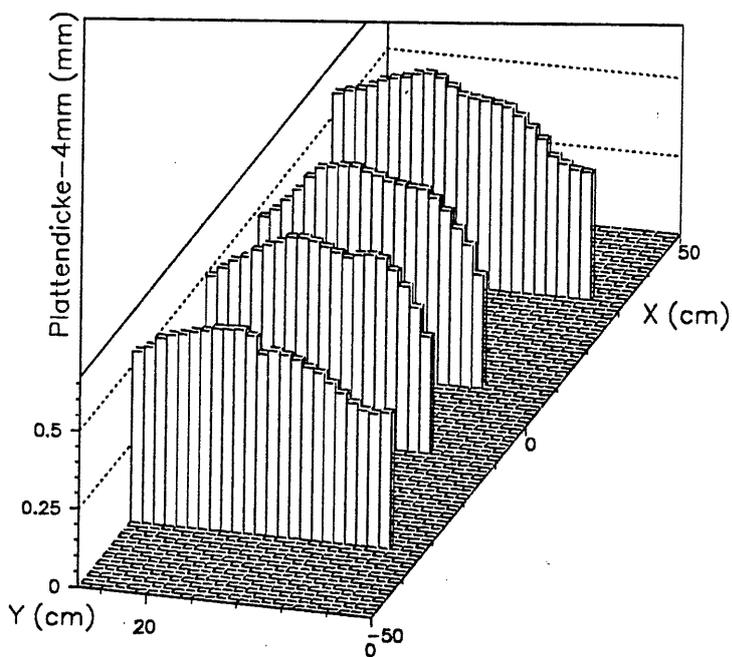
Um die Gaps systematisch zu vermessen wurde eine Gapmeßapparatur entwickelt [H1M06]. In Abbildung 5.6 ist der schematische Aufbau des Meßkopfes gezeigt. Zur Bestimmung der Gapbreiten werden Dehnungsmeßstreifen verwendet, deren Widerstand proportional zur Länge der Leiterbahnen der Dehnungsmeßstreifen variiert [BORR87]. Auf jede Seite von zwei Kupfer-Federn ist ein Dehnungsmeßstreifen aufgeklebt, so daß die Biegung der Kupfer-Federn durch Messung des Widerstandes der Dehnungsmeßstreifen bestimmt werden kann. Die Kupfer-Federn selber sind auf einem G10-Rahmen festgeklebt, der innerhalb eines Kupfer-Rahmens befestigt ist, um den Meßkopf zu schützen. An dem Ende der Kupferfedern befindet sich eine kugelförmige Erhebung, die die Position des Meßpunktes eindeutig definiert. Die größte Gapbreite, die gemessen werden kann, ist durch den Abstand der Erhebungen vorgegeben, und lag bei jedem verwendeten Meßkopf über 3 mm. Die kleinste noch zu messende Gapbreite wird durch die Dicke des Kupfer-Rahmens bestimmt und lag bei 2 mm.

Zur Eichung des Meßkopfes wird ein Eichgap benutzt, bei dem die Gapbreite an bestimmten Stellen bekannt ist. Die gesamte Gapmeßapparatur ist in Abbildung 5.7 dargestellt. Der Meßkopf ist an einer Stange befestigt und wird durch einen Schrittmotor vertikal im Gap positioniert. Horizontal ist der Aufbau mit der Stange und dem Schrittmotor durch ein Schienensystem frei über den gesamten Stack verschiebbar. Die Positioniergenauigkeit des Meßkopfes beträgt 1 mm, die Genauigkeit der gemessenen Gapbreite 10  $\mu\text{m}$ .

In Abbildung 5.8 ist die Position der einzelnen Meßpunkte auf der Fläche einer Ausleseplatte dargestellt und in Tabelle 5.5 aufgeführt. Die angegebenen Positionen stimmen nur, wenn bei keinem Meßpunkt die Gapbreite kleiner als 2 mm ist. Wenn der Meßkopf in das Gap einfährt, wird laufend die Gapbreite gemessen, um zu verhindern, daß der Meßkopf in zu engen Gaps steckenbleibt. Deswegen wird das Einfahren des Meßkopfes bei Gapbreiten, die kleiner als 2 mm sind, abgebrochen und sofort mit der Messung der Gapbreiten begonnen. Der erste Meßpunkt liegt an der Position, wo das Gap schmaller als 2 mm ist, die Anderen folgen in Zentimeterabständen. Bei solchen Meßlinien fehlen also nicht nur Meßpunkte, sondern die Y-Positionen der Meßpunkte sind meistens auch gegenüber den Positionen von vollständig gemessenen Meßlinien versetzt. Dies wirkt bei der Rekonstruktion der Gapbreiten über die gesamte Fläche zusätzliche Probleme auf, da die Meßpunkte



Stack 8, Platte 42



Stack 7, Platte 19

Abbildung 5.5: Messergebnisse der Dickenmessung mit der der Dickenmeßapparatur für FB2E- und BBE-Kalorimeterplatten. Die X- und Y-Richtung entsprechen dem in der Abbildung 3.5 gewählten Koordinatensystem. Auf der Z-Achse ist die gemessene Plattendicke in mm aufgetragen, wobei der Nullpunkt einer Plattendicke von 4 mm entspricht.

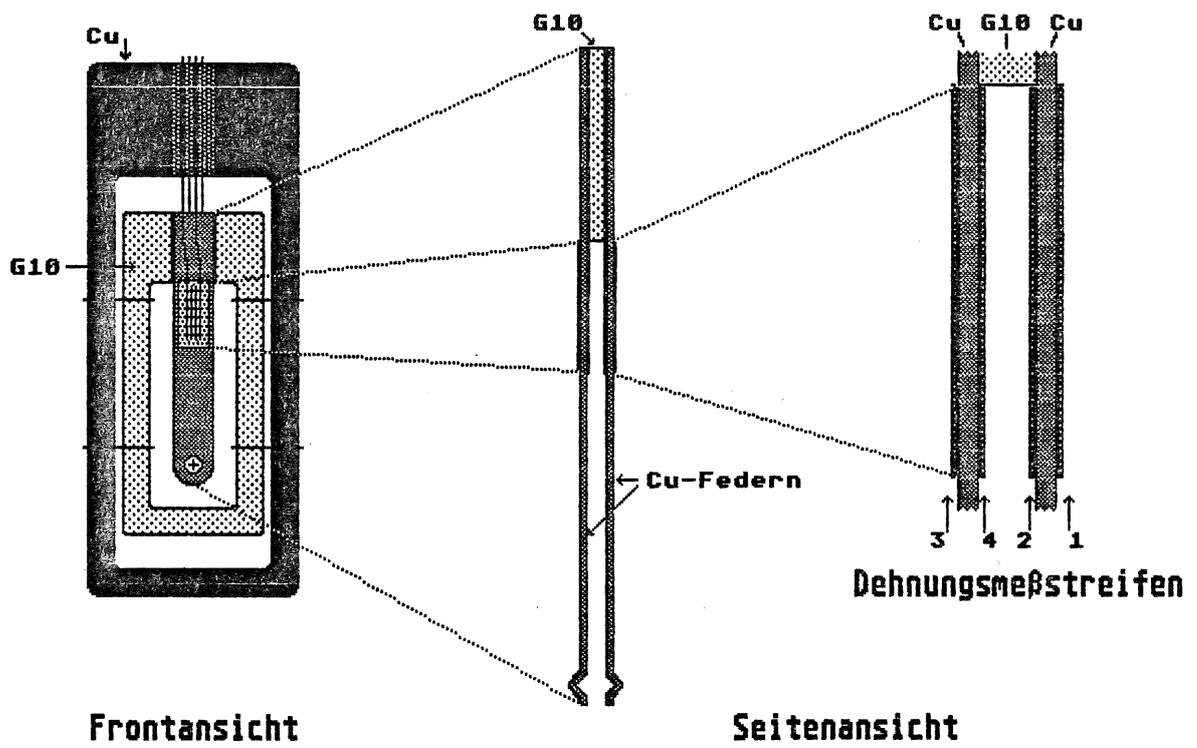


Abbildung 5.6: Schematische Darstellung des Meßkopfes der Gapmeßapparatur

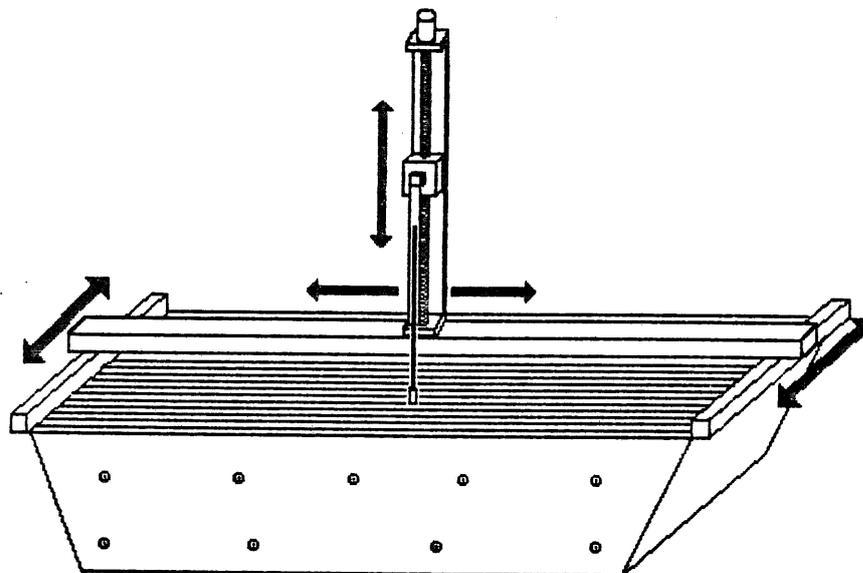


Abbildung 5.7: Schematische Darstellung der Gapmeßapparatur

Meßlinie	FB2E-Gaps		BBE-Gaps	
	X-Position (cm)	Y-Position (cm)	X-Position (cm)	Y-Position (cm)
1	-43.0	10.4,11.4,...,22.4	-33.5	1.9,2.9,...,23.9
2	-33.0	1.9,2.9,...,22.9	-25.0	3.9,4.9,...,23.9
3	-25.0	1.9,2.9,...,22.9	-16.0	5.9,6.9,...,23.9
4	-8.0	1.9,2.9,...,22.9	-6.0	5.9,6.9,...,23.9
5	8.0	1.9,2.9,...,22.9	6.0	5.9,6.9,...,23.9
6	25.0	1.9,2.9,...,22.9	16.0	5.9,6.9,...,23.9
7	-33.0	1.9,2.9,...,22.9	-25.0	3.9,4.9,...,23.9
8	43.0	10.4,11.4,...,22.4	33.5	1.9,2.9,...,23.9

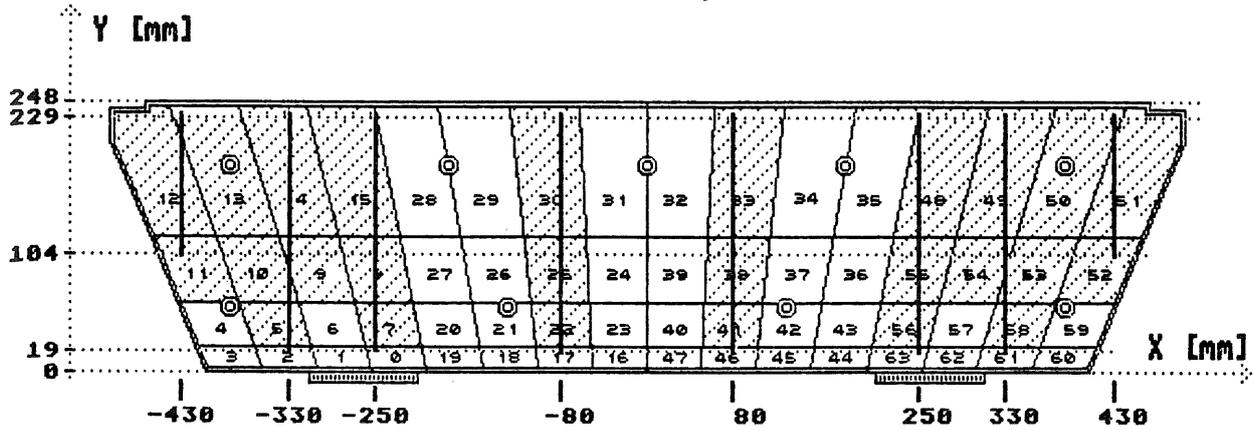
Tabelle 5.5: Die Positionen der Meßpunkte bei der Bestimmung der Gapbreiten. Die zweite und dritte Spalte geben die Positionen für die Messungen in einem FB2E-Gap, die vierte und fünfte Spalte für die Messungen in einem BBE-Gap an.

in Y-Richtung nicht immer die gleichen Positionen haben und die verwendete Methode dies berücksichtigen muß.

Bei acht vollständigen Meßlinien wird an insgesamt 158 Punkte in einem FB2E-Gap und 164 Punkte in einem BBE-Gap die Gapbreite bestimmt.

In Abbildung 5.9 ist das Ergebnis der Gapmessung für ein FB2E- und ein BBE-Gap dargestellt. Die acht, zum Teil unterschiedlich langen Meßlinien sind die Daten für die Inter- und Extrapolation der Gapbreite über die gesamte Auslesefläche der Kalorimeterplatten. Die Form der Verteilung der Meßwerte ist typisch, die Unterschiede zwischen dem Minimum und Maximum der Platte sind allerdings größer als im Durchschnitt.

### FB2E-Ausleseplatte



### BBE-Ausleseplatte

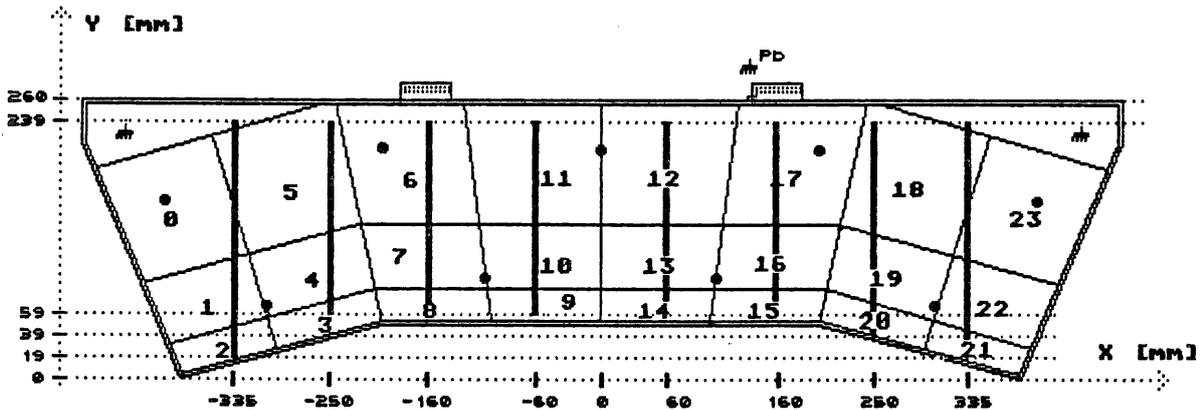
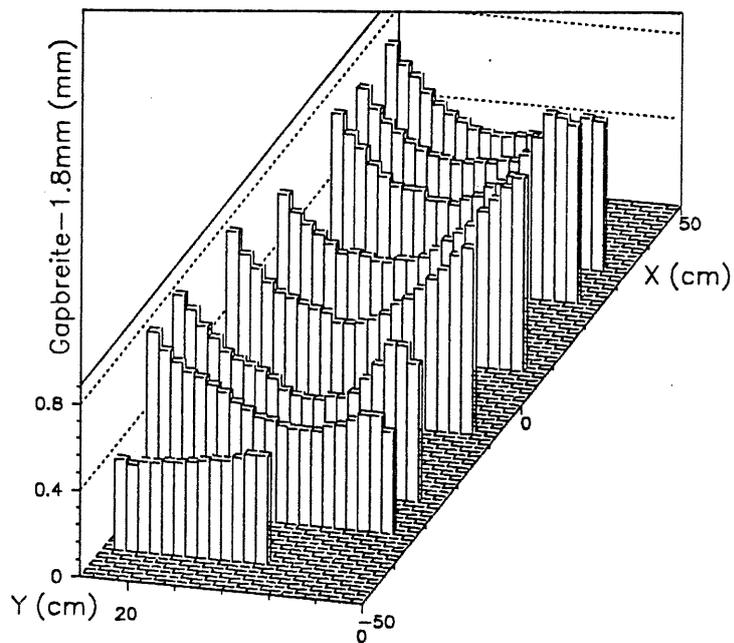
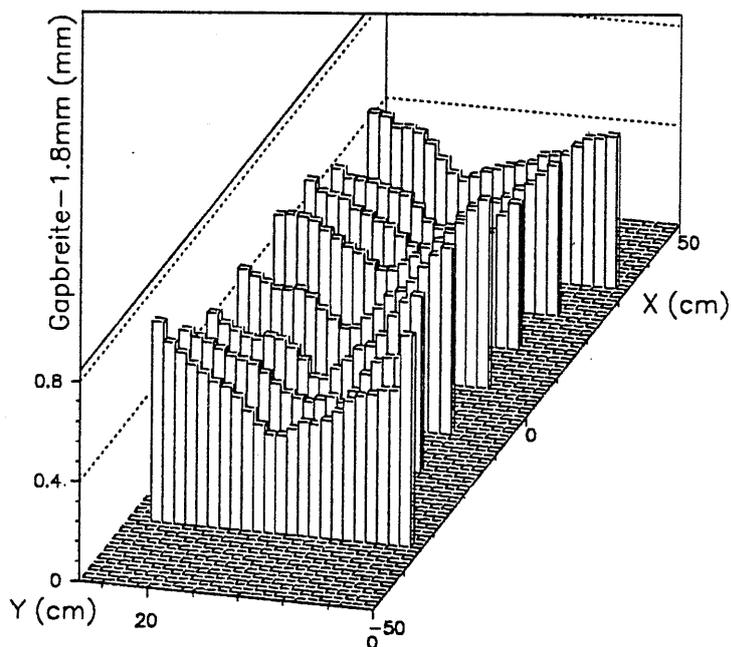


Abbildung 5.8: Die obere Zeichnung stellt die Position der Meßpunkte bei der Bestimmung der Gapbreiten in einem FB2E-Gap auf der Fläche einer Ausleseplatte dar. Die Meßpunkte befinden sich in Zentimeterabständen auf den senkrechten dicken schwarzen Linien. Diejenigen Pads, auf denen mindestens ein Meßpunkt liegt, sind schraffiert. In der unteren Zeichnung ist die Position der Meßpunkte für die Gapmessung eines BBE-Gaps dargestellt. Auf allen Pads liegt mindestens ein Meßpunkt.



Stack 6, Gap 20



Stack 6, Gap 22

Abbildung 5.9: Meßergebnisse von Gapbreiten mit der Gapmeßmaschine. Oben ist das Ergebnis für ein FB2E-Gap und unten für ein BBE-Gap dargestellt. Auf der Z-Achse ist die Gapbreite in mm angegeben, wobei der Nullpunkt einer Gapbreite von 1.8 mm entspricht.

# Kapitel 6

## Rekonstruktion der Dicken und Abstände über die gesamte Plattenfläche

Durch die Messungen der Plattendicken oder Gapbreiten erhält man diskrete Meßpunkte. Für detaillierte Studien wird die Plattendicke oder Gapbreite aber an jedem Punkt der Platten oder Gaps benötigt. Dann ist es möglich, die mittlere Plattendicke oder Gapbreite eines Pads oder eines Auslesekanals zu bestimmen oder ihren Einfluß auf das Kalorimetersignal mit Monte-Carlo Simulationen im Detail zu studieren. In diesem Kapitel wird die Methode beschrieben, mit der die in Kapitel 5 beschriebenen Meßwerte inter- und extrapoliert wurden, um die in Kapitel 7 genannten Analysen durchzuführen.

### 6.1 Generelle Methoden der zweidimensionalen Interpolation

Es gibt verschiedene Methoden, um zwischen einzelnen Punkten zu interpolieren. In Hinblick auf die oben genannten Anwendungen ergeben sich Anforderungen an die Interpolationsmethode:

- Die Methode muß für jeden Punkt auf der Plattenfläche einen Wert liefern. Dieses setzt voraus, daß sowohl zwischen den einzelnen Meßpunkten interpoliert als auch darüber hinaus extrapoliert wird, und zwar in zwei Dimensionen. Wenn die Methode nicht zur Extrapolation verwendet werden kann, muß sie mit Extrapolationsmethoden kombinierbar sein.
- Die Methode muß für die Positionen der Meßpunkte geeignet sein. Die Meßpunkte liegen äquidistant in Zentimeterabständen auf parallelen Linien in Y-Richtung, die

Abstände zwischen den Linien sind unregelmässig und liegen zwischen 8 cm und 24 cm. Die Meßpunkte sind also weder äquidistant noch gleichmäßig noch völlig ungeordnet über die zu interpolierende Fläche verteilt.

- Die Methode sollte eine glättende Wirkung haben, um die Auswirkungen von lokalen Abweichungen, zum Beispiel durch einen lokalen Buckel in der Plattenoberfläche, klein zu halten. Dies ist besonders in Hinsicht auf die großen Abstände in X-Richtung wichtig.
- Die Plattendicke, die Gapbreite und die erste Ableitung dieser Größen sind über die ganze Plattenfläche stetig. Die mit der Methode rekonstruierten Plattendicken oder Gapbreiten sollten daher über die gesamte Plattenfläche auf jeden Fall stetig und nach Möglichkeit stetig differenzierbar sein.
- Die Berechnung der Plattendicke oder der Gapbreite darf nicht zu viele mathematische Operationen erfordern, sonst ist der Zeitaufwand für Monte-Carlo Simulationen zu groß. Bei der EGS<sup>1</sup>-Simulation eines elektromagnetischen Schauers mit einer Energie von 30 GeV wird etwa 300000 mal die Gapbreite bestimmt.

Im Folgenden werden vier verschiedene Methoden beschrieben und mit den oben genannten Anforderungen verglichen. Außerdem werden die Methoden eindimensional auf die jeweils gleiche Gruppe von Meßpunkten angewendet und das Ergebnis der Interpolation in Abbildungen dargestellt. Die Interpolation ist bei den Abbildungen eindimensional, weil so die Unterschiede der Methoden besser sichtbar sind. Die Meßpunkte sind mit Kreuzen markiert.

1. Die erste und einfachste Methode berechnet den gewichteten Mittelwert an einem vorgegebenen Punkt. Als Gewicht wird der Abstand zwischen dem vorgegebenen Punkt und dem betrachteten Meßpunkt benutzt. Als Funktionswert ergibt sich somit:

$$f(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{r_i^p}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i^p}} \quad (6.1)$$

Es wird über alle  $n$  Meßpunkte summiert, wobei  $d$  für den Meßwert am  $i$ -ten Meßpunkt und  $r$  für den Abstand dieses Meßpunktes zum dem durch die Variablen  $x$  und  $y$  vorgegebenen Punkt steht. Durch Veränderung der Potenz  $p$  kann das Gewicht des Abstandes variiert werden.

Die Anforderungen werden nur teilweise erfüllt. Die Methode liefert zwar stetige Funktionswerte über die gesamte Plattenfläche, aber an den Positionen der Meßpunkte ist die Methode nicht mehr stetig differenzierbar. Durch die Mittelwertbildung findet zwar eine Glättung statt, allerdings wird dadurch auch die generelle

<sup>1</sup>EGS ist ein Monte-Carlo Simulationsprogramm für elektromagnetische Schauer [NELS85]

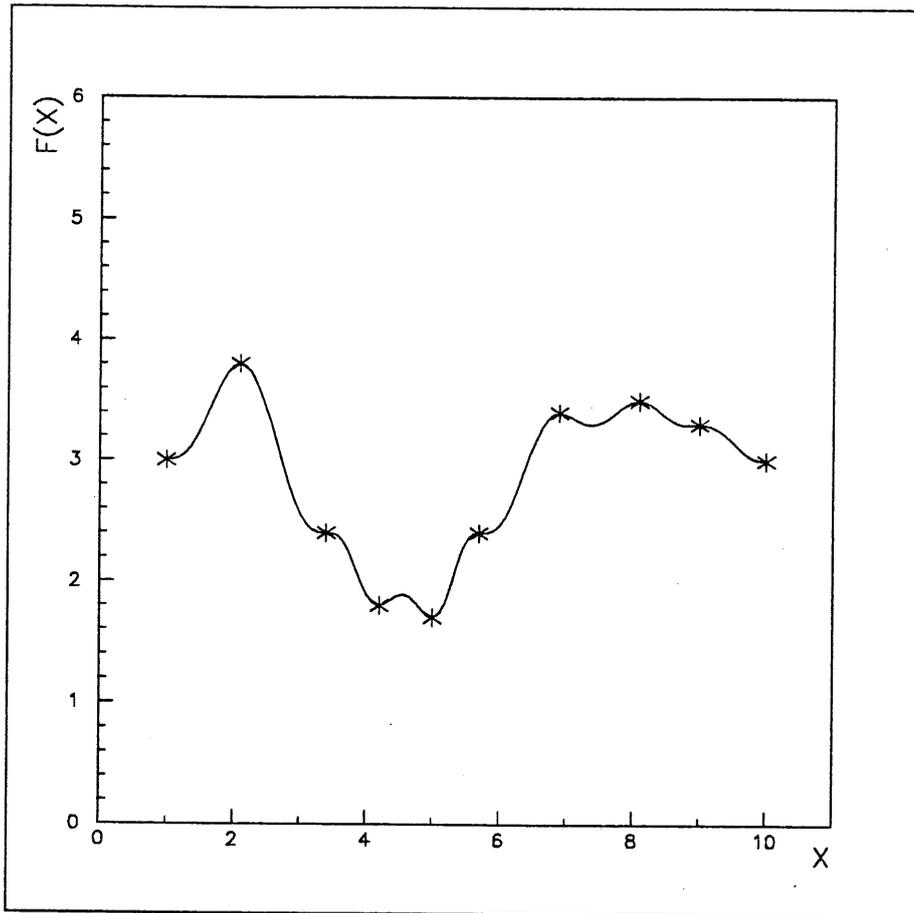


Abbildung 6.1: Eindimensionale Interpolation mit gewichtetem Mittelwert.

Form der Platte oder des Gaps verzerrt. Bei wenigen Meßpunkten ist die Verzerrung besonders stark, was zu systematischen Verschiebungen führt. Bei vielen Meßpunkten ist der Rechenaufwand sehr groß und für Monte-Carlo Simulationen nicht anwendbar. Abbildung 6.1 zeigt ein Beispiel für die eindimensionale Interpolation mit dieser Methode, bei dem auch die angesprochenen Verzerrungen sichtbar sind.

2. Die zweite Methode verwendet Fourierreihen zur Interpolation. Sie wird von Geologen [JAME66] zur Beschreibung von Erdoberflächen benutzt. Bei dieser Anwendung sind die Meßpunkte oft völlig ungeordnet über die zu interpolierende Fläche verteilt. Durch die Verwendung von trigonometrischen Funktionen eignet sich diese Methode vor allem für gekrümmte Flächen. Der Funktionswert wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}
 F(x, y) = & \sum_{i=0}^{KC} \sum_{j=0}^{LC} a_{ij}^{(1)} \cos(i * X) \cos(j * Y) \\
 & + \sum_{i=0}^{KC} \sum_{j=0}^{LS} a_{ij}^{(2)} \cos(i * X) \sin(j * Y)
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^{KS} \sum_{j=0}^{LC} a_{ij}^{(3)} \sin(i * X) \cos(j * Y) \\
& + \sum_{i=0}^{KS} \sum_{j=0}^{LS} a_{ij}^{(4)} \sin(i * X) \sin(j * Y)
\end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad X = 2\pi \frac{x}{x_{max}}, \quad Y = 2\pi \frac{y}{y_{max}}$$

Die Parameter  $KC$ ,  $LC$ ,  $KS$  und  $LS$  bestimmen die Anzahl der Sinus- und Kosinus-Terme für beide Dimensionen. Mit den Konstanten  $x_{max}$  und  $y_{max}$  wird die Grundschwingungslänge festgelegt. Ist eine Platte zum Beispiel in  $Y$ -Richtung annähernd gaußförmig, dann ist es sinnvoll, sofern der Nullpunkt an dem Rand der Platte liegt, mehr Sinus- als Kosinus-Terme und das Doppelte der Plattenlänge in  $Y$ -Richtung als Grundschwingungslänge zu verwenden. Bei anderen Plattenformen sieht es wieder ganz anders aus. Für die Meßpunkte von der Dicken- und Gapmessung ist dieses Methode nicht geeignet, weil die Meßpunkte in  $X$ -Richtung in Linien angeordnet sind und sich dadurch bei der Interpolation zwischen den Meßlinien Oberschwingungen ausbilden. Da sich zwischen den Meßlinien keine Meßpunkte befinden, hat das Verhalten der Fourierreihe zwischen den Meßlinien keinen Einfluß auf die Bestimmung der Koeffizienten  $a_{ij}^{(l)}$ . Der Zeitaufwand ist durch die Verwendung von trigonometrischen Funktionen nicht unerheblich. Abbildung 6.2 zeigt ein Beispiel für eine eindimensionale Interpolation mit einer Fourierreihe.

3. Bei der nächsten Methode wird die zu interpolierende Fläche in viele einzelne Rechtecke unterteilt. Die Meßpunkte bilden jeweils die Ecken eines Rechtecks. Die Form der Oberfläche in jedem Rechteck wird durch ein Polynom beschrieben, beispielsweise durch ein Polynom zweiten Grades:

$$F(x, y) = a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)}x + a_{ij}^{(2)}x^2 + a_{ij}^{(3)}y + a_{ij}^{(4)}xy + a_{ij}^{(5)}x^2y + a_{ij}^{(6)}y^2 + a_{ij}^{(7)}xy^2 + a_{ij}^{(8)}x^2y^2 \quad (6.3)$$

Die Indices  $i$  und  $j$  bezeichnen das Rechteck, in dem sich der durch  $x$  und  $y$  vorgegebene Punkt befindet. Das Polynom enthält neun Koeffizienten  $a_{ij}^{(l)}$ , die durch die Meßpunkte in den Ecken und die Stetigkeitsforderung an die erste Ableitung beim Übergang von einem Rechteck in ein benachbartes Rechteck festgelegt werden. An den Rändern der zu interpolierenden Fläche und insbesondere in den Ecken sind nicht alle Koeffizienten eindeutig bestimmbar. Dort muß man auf entsprechend viele Terme verzichten. Die Berechnung der Koeffizienten erfolgt iterativ, die Koeffizienten der einzelnen Rechtecke werden nacheinander bestimmt. Bei dieser Methode wird nur interpoliert, es muß separat extrapoliert werden. Der Zeitaufwand ist sehr kurz, weil die Koeffizienten nur einmal berechnet und dann abgespeichert werden. Bei der Berechnung des Funktionwertes beschränken sich die Rechenoperationen auf die Bestimmung des richtigen Rechtecks und das Einsetzen in das Polynom. Diese

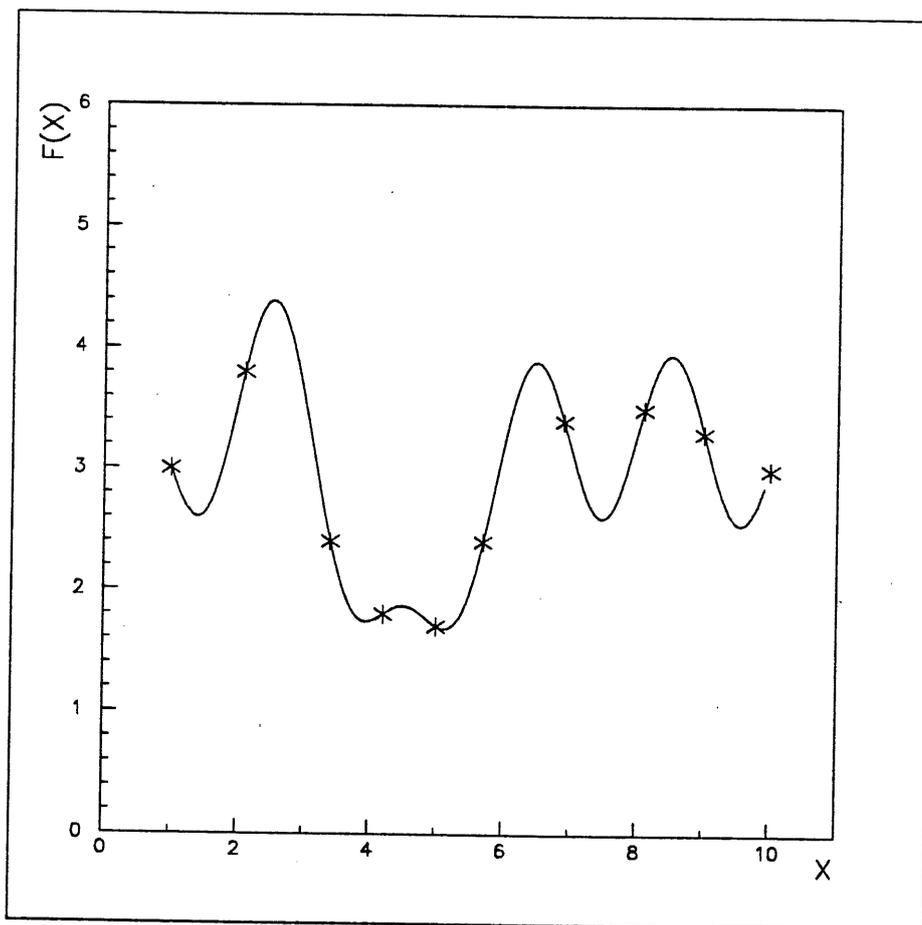


Abbildung 6.2: Eindimensionale Interpolation mit einer Fourierreihe. Zur Interpolation ist eine Fourierreihe bestehend aus fünf Sinus- und Kosinus-Termen verwendet worden.

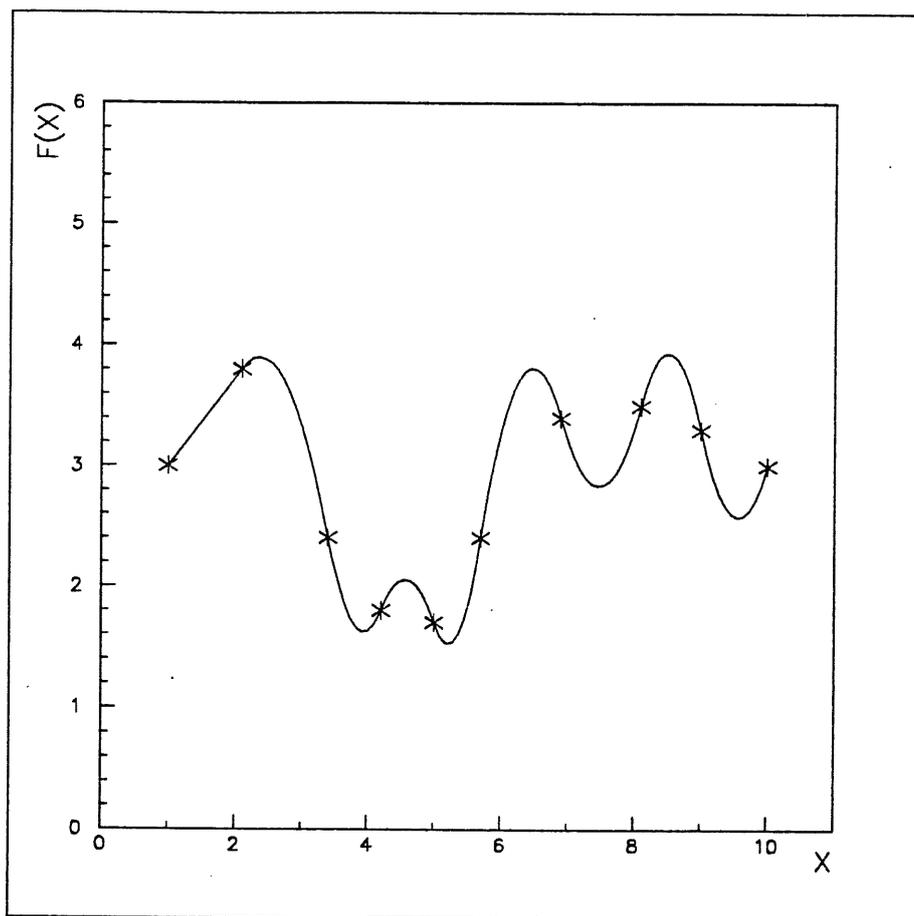


Abbildung 6.3: Eindimensionale Interpolation mit iterativ bestimmten Polynomen zweiten Grades

Methode neigt zu Schwingungen zwischen den einzelnen Meßpunkten. Dies wird auch in Abbildung 6.3 deutlich. Deshalb ist diese Methode nicht brauchbar.

4. Auch bei der letzten Methode, der Spline-Interpolation, wird die zu interpolierende Fläche in viele kleine Rechtecke zerlegt, deren Ecken als Knoten bezeichnet werden. Nach [BRON86] ist eine Spline-Funktion wie folgt definiert:

Sei  $K_n$  ein System von Stützstellen  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , *Knoten* genannt, dann heißt  $S_k(x)$  *Spline-Funktion* vom Grad  $k \geq 0$  über  $K_n$ , wenn gilt:

- $S_k(x) \in C^{k-1}([a, b])$ , die Spline-Funktion ist also im ganzen Intervall  $[a, b]$   $k - 1$  mal stetig differenzierbar.
- $S_k(x)$  ist für  $x \in [x_{j-1}, x_j]$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) ein Polynom höchstens vom Grade  $k$ .

Die Menge der Spline-Funktionen über  $K_n$  wird mit  $S_k(K_n)$  bezeichnet.

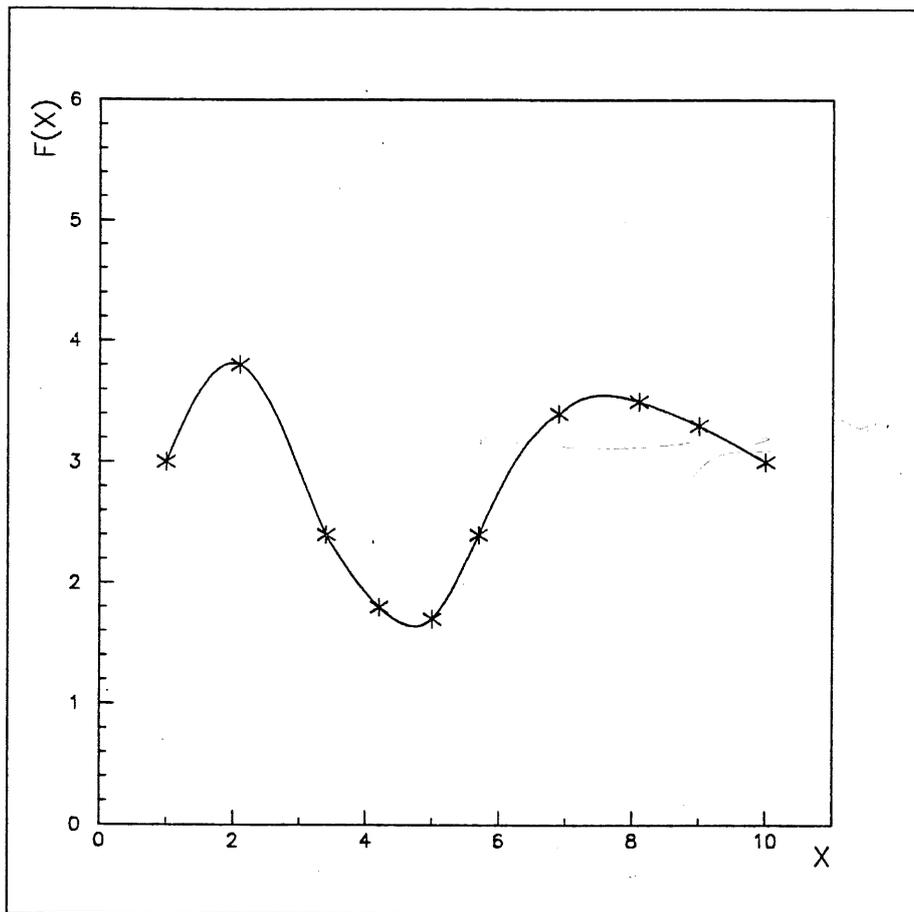


Abbildung 6.4: Eindimensionale kubische Spline-Interpolation

Abbildung 6.4 zeigt das Ergebnis einer kubischen Spline-Interpolation bei der schon in Abbildung 6.1 bis Abbildung 6.3 verwendeten Stichprobe von Meßpunkten. Diese Methode liefert von den vier beschriebenen das beste Interpolationsergebnis. Der Zeitaufwand ist relativ gering, weil im Wesentlichen nur der Funktionswert eines Polynoms berechnet wird. Im folgenden Abschnitt wird eine Darstellung der zweidimensionalen kubischen Spline-Funktion mit der Möglichkeit der Glättung hergeleitet. Mit der Extrapolation befaßt sich ein weiterer Abschnitt in diesem Kapitel.

## 6.2 Kubische Spline-Funktionen

Kubische Spline-Funktionen sind Spline-Funktionen vom Grad 3. Sie sind über das ganze Interpolationsintervall zweimal stetig differenzierbar und werden zwischen den Knoten durch ein Polynom höchstens dritten Grades beschrieben. Für den zweidimensionalen Fall besitzt das Polynom sechzehn Terme:

$$\begin{aligned}
 F(x, y) = & A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4y + A_5xy \\
 & + A_6x^2y + A_7x^3y + A_8y^2 + A_9xy^2 + A_{10}x^2y^2
 \end{aligned}
 \tag{6.4}$$

$$+ A_{11}x^3y^2 + A_{12}y^3 + A_{13}xy^3 + A_{14}x^2y^3 + A_{15}x^3y^3$$

Bei der folgenden Herleitung wird zuerst die eindimensionale Spline-Interpolation nach [BRON86] betrachtet. Diese Methode wird erweitert, um Kurven glätten zu können. Danach erfolgt der Übergang auf zwei Dimensionen und zum Schluß werden die impliziten Gleichungen nach den Variablen  $x$  und  $y$  aufgelöst, um die Spline-Funktion durch das Polynom (6.4) anzugeben.

Für die Herleitung sollen folgenden Definitionen gelten:

- Die Meßpunkte sind durch die Koordinaten  $x_i$  und  $y_i$  bestimmt und der Messwert ist  $d_i = d(x_i, y_i)$ . Der Index  $i$  bezieht sich auf den  $i$ -ten Meßpunkt und befindet sich im Intervall von  $0 \leq i \leq m$ , wobei  $m + 1$  gleich der Anzahl der Meßpunkte ist. Für die Herleitung der eindimensionalen Spline-Funktion wird nur die Koordinate  $y_i$  betrachtet, wobei immer  $y_0 < y_1 < \dots < y_n$  gelten soll.
- Für die Splinefunktion gibt es ein System von Stützstellen  $K_n$ , Knoten genannt. Jedem Knoten ist ein Stützwert zugeordnet, der in der verwendeten Darstellung gleich dem Funktionswert der Spline-Funktion an der Position des Knotens ist. Die Position des  $j$ -ten Knotens ist durch  $k_j$  und der Stützwert durch  $l_j$  gegeben.  $h_j$  ist als der Abstand zwischen benachbarten Knoten definiert, also  $h_{j'} := k_{j'} - k_{j'-1}$ . Die Konstante  $n$  ist gleich der Anzahl der Knoten  $- 1$ , es gilt also  $0 \leq j \leq n$ ,  $1 \leq j' \leq n$ .
- Mit  $S_k(K_n)$  wird die Menge der Spline-Funktionen über  $K_n$  bezeichnet.
- Eine Spline-Funktion  $\hat{S}_k(x) \in S_k(K_n)$  heißt interpolierende Spline-Funktion, wenn  $\hat{S}_k(x_i) = d_i = f(x_i)$  für  $i = 0, 1, \dots, m$  gilt.

Andere Darstellungen von Spline-Funktionen sind in [SPAE73],[SPAE90] und [LEBO78] beschrieben.

### 6.2.1 Eindimensionale kubische Spline-Interpolation

Die Bedingung für eine interpolierende Spline-Funktion läßt sich erfüllen, indem man die Knoten an die Positionen der Meßpunkte setzt und als Stützwerte die Messwerte nimmt. In diesem Fall gilt:

$$k_j := y_j \rightarrow h_j = y_j - y_{j-1}, \quad l_j := d_j \quad \text{mit } 0 \leq j \leq n = m$$

Die Spline-Funktion  $s(y)$  ist definiert als Spline-Funktion dritten Grades  $S_3(y)$  und deshalb im gesamten Intervall  $[k_0, k_n]$  zweimal stetig differenzierbar und zwischen den Knoten ein Polynom höchstens dritten Grades. Darum wird die zweite Ableitung von  $s(y)$  zwischen zwei Knoten höchstens durch ein lineares Polynom beschrieben. Um das lineare

Polynom eindeutig zu bestimmen, verwendet man die Funktionswerte der zweiten Ableitung der Spline-Funktion an den Positionen der Knoten als Konstanten  $s_j'' := s''(k_j = d_j)$ . Eine Darstellung des Polynoms ist

$$s''(y) = -s_{j-1}'' \frac{y - k_j}{h_j} + s_j'' \frac{y - k_{j-1}}{h_j} \quad \text{mit } k_{j-1} \leq y \leq k_j \quad (6.5)$$

Die Konstanten  $s_{j-1}''$  und  $s_j''$  sind unbekannt und müssen noch bestimmt werden.

Das Polynom der Spline-Funktion erhält man durch zweimaliges Integrieren des Polynoms (6.5):

$$s(y) = -s_{j-1}'' \frac{(y - k_j)^3}{6h_j} + s_j'' \frac{(y - k_{j-1})^3}{6h_j} + c_{j1}y + c_{j0}. \quad (6.6)$$

Die Integrationskonstanten  $c_{j1}$  und  $c_{j0}$  werden durch die Interpolations-Bedingung  $s(y_j) = d_j$  festgelegt, was in der gewählten Darstellung der Bedingung  $s(k_j) = l_j$  entspricht. Die Variable  $y$  wird gleich der Position der Knoten, die das Spline-Intervall begrenzen, gesetzt:

$$\begin{aligned} y = k_j &\longrightarrow s_j'' \frac{h_j^2}{6} + c_{j1}k_j + c_{j0} = l_j \\ y = k_{j-1} &\longrightarrow -s_{j-1}'' \frac{h_j^2}{6} + c_{j1}k_{j-1} + c_{j0} = l_{j-1} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Der folgende Ansatz

$$c_{j1}y + c_{j0} = \left( \frac{l_j}{h_j} - \frac{s_j'' h_j}{6} \right) (y - k_{j-1}) - \left( \frac{l_{j-1}}{h_j} - \frac{s_{j-1}'' h_j}{6} \right) (y - k_j)$$

erfüllt beide Bedingungen von (6.7) und die Integrationskonstanten  $c_j$  sind eindeutig bestimmt. Das Polynom der Spline-Funktion hat somit folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} s(y) = & -s_{j-1}'' \frac{(y - k_j)^3}{6h_j} + s_j'' \frac{(y - k_{j-1})^3}{6h_j} + \left( \frac{l_j}{h_j} - \frac{s_j'' h_j}{6} \right) (y - k_{j-1}) \\ & - \left( \frac{l_{j-1}}{h_j} - \frac{s_{j-1}'' h_j}{6} \right) (y - k_j) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Um die Unbekannten  $s_0'', s_1'', \dots, s_n''$  zu bestimmen, wird Gleichung (6.8) einmal differenziert:

$$\begin{aligned} s'(y) = & -s_{j-1}'' \frac{(y - k_j)^2}{2h_j} + s_j'' \frac{(y - k_{j-1})^2}{2h_j} + \left( \frac{l_j}{h_j} - \frac{s_j'' h_j}{6} \right) \\ & - \left( \frac{l_{j-1}}{h_j} - \frac{s_{j-1}'' h_j}{6} \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

und  $s'(y)$  an den Positionen der Knoten betrachtet, an denen die Polynome der Spline-Funktionen stetig ineinander übergehen:

$$s'(k_j) = s_j'' \frac{h_j}{3} + s_{j-1}'' \frac{h_j}{6} + \frac{l_j - l_{j-1}}{h_j} \quad (6.10)$$

und  $s'(k_j)$  vom folgenden Spline-Intervall aus bestimmt:

$$s'(k_j) = -s_j'' \frac{h_{j+1}}{3} - s_{j+1}'' \frac{h_{j+1}}{6} + \frac{l_{j+1} - l_j}{h_{j+1}} \quad (6.11)$$

Man erhält somit ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Konstanten

$$s_{j-1}'' \frac{h_j}{6} + s_j'' \frac{h_j + h_{j+1}}{3} + s_{j+1}'' \frac{h_{j+1}}{6} = \frac{l_{j+1} - l_j}{h_{j+1}} - \frac{l_j - l_{j-1}}{h_j} \quad (6.12)$$

$$j = 1, 2, \dots, n-1$$

Es bleiben zwei Unbekannte übrig, die durch zwei zusätzliche Gleichungen bestimmt werden müssen. Je nach Verwendungszweck der Spline-Funktionen werden folgende Methoden benutzt:

1. *Normalfall (N)*: Bei dieser Methode wird die Steigung der Spline-Funktion am ersten und letzten Knoten vorgegeben:

$$s'_0 = y'_0, \quad s'_n = y'_n$$

Zur Bestimmung von  $s''_0$  und  $s''_n$  erhält man damit folgende Gleichungen:

$$s''_0 \frac{h_1}{3} + s''_1 \frac{h_1}{6} = \frac{k_1 - k_0}{h_1} - y'_0$$

$$s''_{n-1} \frac{h_n}{6} + s''_n \frac{h_n}{3} = \frac{k_n - k_{n-1}}{h_1} - y'_n$$

2. *Periodischer Fall (P)*: Bei periodischen Funktionen wählt man das Spline-Intervall gleich der Periode, also  $f(y + (y_n - y_0)) = f(y)$ , wodurch man die beiden zusätzlichen Bedingungen

$$s''_0 = s''_n, \quad s''_1 = s''_{n+1}$$

erhält. Die erste Gleichung des Gleichungssystems (6.12) wird durch

$$s''_1 \frac{h_1 + h_2}{3} + s''_2 \frac{h_2}{6} + s''_n \frac{h_1}{6} = \frac{k_2 - k_1}{h_2} - \frac{k_1 - k_0}{h_1},$$

ersetzt und hinzu kommt noch die Gleichung

$$s''_1 \frac{h_1}{6} + s''_{n-1} \frac{h_n}{6} + s''_n \frac{h_n + h_1}{3} = \frac{k_1 - k_n}{h_1} - \frac{y_n - k_{n-1}}{k_n}$$

3. *Vorgebene Randglättung (R)*: Mit zwei Parametern wird die zweite Ableitung an den Endknoten in Abhängigkeit von dem nachfolgendem beziehungsweise vorhergehendem Knoten vorgegeben und damit die Glättung der Spline-Funktion an den Rändern gesteuert:

$$s''_0 = \alpha s''_1, \quad s''_n = \beta s''_{n-1}$$

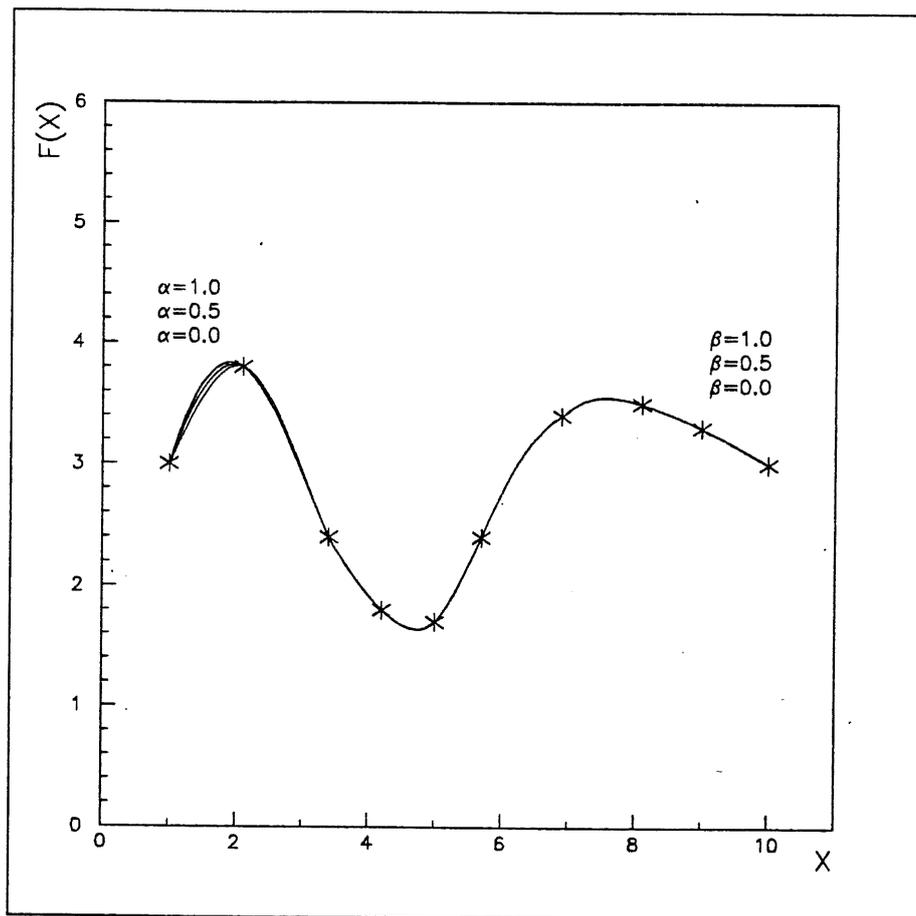


Abbildung 6.5: Abhängigkeit der Spline-Funktion von den Randglättungsparametern  $\alpha$  und  $\beta$ . Als Werte sind 1, 0.5 und 0 verwendet worden, die Unterschiede sind nur bei starken Krümmungen am Rand sichtbar, wenn die Spline-Funktionen übereinander gezeichnet werden.

Die erste und letzte Gleichung des Gleichungssystems (6.12) werden durch die folgenden Gleichungen ersetzt.

$$s_1'' \frac{(1 + \alpha/2)h_1 + h_2}{3} + s_2'' \frac{h_2}{6} = \frac{k_2 - k_1}{h_2} - \frac{k_1 - k_0}{h_1},$$

$$s_{n-2}'' \frac{h_{n-1}}{6} + s_{n-1}'' \frac{h_{n-1} + (1 + \beta/2)h_n}{3} = \frac{k_n - k_{n-1}}{h_n} - \frac{k_{n-1} - k_{n-2}}{h_{n-1}}$$

In Abbildung 6.5 sind Spline-Funktionen mit verschiedenen Werten für  $\alpha$  und  $\beta$  gezeigt.

Damit sind dann alle Koeffizienten der Spline-Funktion eindeutig bestimmt. Für die Anwendung auf die in dieser Arbeit betrachteten Meßwerten eignet sich nur die dritte Methode, weil weder die Steigung am ersten oder letzten Meßpunkt bekannt noch die Form der Kalorimeterplatten und Gaps periodisch ist.

Die Spline-Interpolation besitzt eine wichtige Eigenschaft. Unter allen interpolierenden, über  $[y_0, y_n]$  zweimal stetig differenzierbaren Funktionen  $\varphi(y)$  macht genau die interpolierende Spline-Funktion vom Grade 3 das Funktional  $J(\varphi) := \int_{y_0}^{y_n} (\varphi''(y))^2 dy$  zum Minimum. Das bedeutet anders ausgedrückt:

$$\int_a^b (s''(y))^2 dy \leq \int_a^b (\varphi''(y))^2 dy$$

für alle Funktionen  $\varphi(y)$  aus  $C^2([y_0, y_n])$  und der Eigenschaft  $\varphi(y_j) = d_j$ . Diese Eigenschaft besagt im Wesentlichen, daß die Gesamtkrümmung der interpolierenden Kurve minimal wird — eine Eigenschaft, die ein durch die Knoten gelegtes elastisches Lineal (engl. *spline*) ebenfalls annähernd realisiert.

### 6.2.2 Auflösung nach den Stützstellen

Für Spline-Bestimmungen mit festen Knotenpositionen  $k_j$  und variablen Stützwerten  $l_j$  ist es zweckmäßig, die Spline-Gleichungen explizit nach den Stützwerten aufzulösen. Dadurch beschränkt sich die nächste Bestimmung der Spline-Funktionen auf das Einsetzen der neuen Werte für die Stützwerte anstatt die kompletten Spline-Funktionen neu zu berechnen.

Man betrachtet dazu die Gleichung (6.12) mit den Modifikationen des Falles (R) und erhält folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} s_0 &= \alpha s_1'' \\ s_1'' \frac{(1 + \alpha/2)h_1 + h_2}{3} + s_2'' \frac{h_2}{6} &= \frac{k_2 - k_1}{h_2} - \frac{k_1 - k_0}{h_1} \\ s_{j-1}'' \frac{h_j}{6} + s_j'' \frac{h_j + h_{j+1}}{3} + s_{j+1}'' \frac{h_{j+1}}{6} &= \frac{k_{j+1} - k_j}{h_{j+1}} - \frac{k_j - k_{j-1}}{h_j} \\ s_{n-2}'' \frac{h_{n-1}}{6} + s_{n-1}'' \frac{h_{n-1} + (1 + \beta/2)h_n}{3} &= \frac{k_n - k_{n-1}}{h_n} - \frac{k_{n-1} - k_{n-2}}{h_{n-1}} \\ s_n'' &= \beta s_{n-1}'' \\ \text{mit } 2 \leq j &\leq n-2 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Seien  $\vec{s}$  und  $\vec{l}$  Vektoren, die die  $s_j$ ,  $l_j$ ,  $0 \leq j \leq n$  als einzelne Komponenten enthalten. Dann läßt sich das Gleichungssystem (6.13) als Matrixgleichung schreiben:

$$\mathcal{M}\vec{s} = \vec{b} = \mathcal{B}\vec{l} \quad (6.14)$$

wobei die Matrizen  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{B}$  quadratisch sind mit den Koeffizienten:

$$\begin{aligned} m_{00} &= 1 & m_{01} &= -\alpha \\ m_{11} &= \frac{(1+\alpha/2)h_1+h_2}{3} & m_{12} &= \frac{h_2}{6} \\ \\ m_{jj-1} &= \frac{h_j}{6} & m_{jj} &= \frac{h_j+h_{j+1}}{3} & m_{jj+1} &= \frac{h_{j+1}}{6} \\ & & \text{mit } 2 \leq j \leq n-2 & & & \\ \\ m_{n-1n-2} &= \frac{h_{n-1}}{6} & m_{n-1n-1} &= \frac{h_{n-1}+(1+\beta/2)h_n}{3} \\ m_{n-1n} &= -\beta & m_{nn} &= 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b_{jj-1} &= \frac{1}{h_j} & b_{jj} &= -\frac{h_j+h_{j+1}}{h_j h_{j+1}} & b_{jj+1} &= \frac{1}{h_{j+1}} \\ & & \text{mit } 1 \leq j \leq n-1 & & & \end{aligned}$$

Alle anderen Matrixkoeffizienten der beiden Matrizen sind gleich Null.

Multipliziert man die Gleichung (6.14) auf beiden Seiten mit der invertierten Matrix  $\mathcal{M}^{-1}$  erhält man:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{-1}\mathcal{M}\vec{s} &= \underbrace{\mathcal{M}^{-1}\mathcal{B}}_{=:C}\vec{y} \\ \Rightarrow \vec{s} &= C\vec{y} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Wenn also die Positionen der Knoten gleich bleiben, lassen sich die Spline-Koeffizienten  $s_j$  mit einer einfachen Matrix-Vektor Multiplikation bestimmen. Die Matrix  $\mathcal{M}$  enthält die Koeffizienten eines eindeutig lösbaren Gleichungssystems, weshalb die Matrix  $\mathcal{M}$  immer regulär und damit invertierbar ist. Die Matrix  $C$  erhält man durch die Matrixmultiplikation von  $\mathcal{M}^{-1}$  mit  $\mathcal{B}$ .

Mit  $\vec{s}$  kann die Gleichung (6.8) umgeschrieben werden. Die Gleichung wird nach  $s_j$  und  $l_j$  aufgelöst. Mit den Definitionen von

$$f_{j1}(y) := -\frac{(y-k_j)^3}{6h_j} + \frac{h_j}{6}(y-k_j) \quad (6.16)$$

$$f_{j2}(y) := \frac{(y-k_{j-1})^3}{6h_j} - \frac{h_j}{6}(y-k_{j-1}) \quad (6.17)$$

$$f_{j3}(y) := \frac{y-k_{j-1}}{h_j} \quad (6.18)$$

$$f_{j4}(y) := -\frac{y-k_j}{h_j} \quad (6.19)$$

$$\text{für } k_{j-1} \leq y \leq k_j \quad (6.20)$$

kann die Spline-Funktion  $s(y)$  in der folgenden Form angegeben werden:

$$s(y) = s_{j-1}f_{j1}(y) + s_j f_{j2}(y) + l_j f_{j3}(y) + l_{j-1} f_{j4}(y) \quad (6.21)$$

In dieser Gleichung stehen einzelne Komponenten der Vektoren  $\vec{s}$  und  $\vec{l}$ . Um also Gleichung (6.15) in Gleichung (6.21) einzusetzen, müssen noch die richtigen Komponenten aus den Vektoren herausprojiziert werden. Der Projektionsvektor soll folgende Eigenschaften haben:

$$\begin{aligned}\vec{v}_j \vec{l} &= l_j \\ \vec{v}_j \mathcal{C} \vec{l} &= s_j\end{aligned}$$

$\vec{v}_j$  liefert also bei Skalarmultiplikation mit einem Vektor die j-te Komponente des Vektors und bei Multiplikation mit einer Matrix den j-ten Zeilenvektor der Matrix als Ergebnis<sup>2</sup>. Die Definition des Vektors als  $\vec{v}_j = (0 \dots 0 1 0 \dots 0)^T$  mit der 1 als j-te Komponente erfüllt die geforderten Bedingungen und Gleichung (6.21) läßt sich schreiben als:

$$\begin{aligned}s(y) &= f_{j1}(y) \vec{v}_{j-1} \mathcal{C} \vec{l} + f_{j2}(y) \vec{v}_j \mathcal{C} \vec{l} + f_{j3}(y) \vec{v}_j \vec{l} + f_{j4}(y) \vec{v}_{j-1} \vec{l} \\ &= \underbrace{(f_{j1}(y) \vec{v}_{j-1} \mathcal{C} + f_{j2}(y) \vec{v}_j \mathcal{C} + f_{j3}(y) \vec{v}_j + f_{j4}(y) \vec{v}_{j-1})}_{=: \vec{f}_j(y)} \vec{l}\end{aligned}\quad (6.22)$$

$$= \vec{f}_j(y) \vec{l} \quad (6.23)$$

Diese Darstellung wird beim Übergang auf einen zweidimensionalen Algorithmus noch wichtig sein.

### 6.2.3 Kubische Spline-Anpassung

Soll die Kurve geglättet werden, kann man weniger Knoten als Meßpunkte nehmen und die Spline-Koeffizienten möglichst gut an die Meßpunkte anpassen. Die Interpolationsbedingung  $s(y_j) = d_j$  gilt natürlich in diesem Fall nicht mehr.

Gegeben seien wieder  $n + 1$  Punkte mit den Koordinaten  $y_i$  und den Werten  $d_i$ . Zusätzlich sei jedem Meßwert noch ein Fehler  $\sigma_i$  zugeordnet. Um die Spline-Funktion  $s(y)$  zu berechnen, gibt man die Knoten  $k_j$  vor und bestimmt durch Minimierung von

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^n \frac{(d_i - s(y_i))^2}{\sigma_i^2} \quad (6.24)$$

die Stützwerte  $l_j$  an den Knoten ( $0 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq j \leq m$ ,  $m = \text{Anzahl der Spline-Teilintervalle} = \text{Anzahl der Knoten} - 1$ )

Um das Minimum von  $\chi^2$  zu bestimmen, leitet man die Gleichung nach  $l_j$  ab und berechnet die Nullstelle.

$$\frac{\partial}{\partial l_j} \chi^2 = 0 = \frac{\partial}{\partial l_j} \sum_{\substack{i=0 \\ k_{p-1} \leq y_i \leq k_p}}^n \frac{(d_i - \vec{f}_p(y_i) \vec{l})^2}{\sigma_i^2}$$

<sup>2</sup>Bei der numerischen Berechnung greift man zweckmäßigerweise direkt auf die gewünschten Komponenten zu, anstatt sie mit  $\vec{v}_j$  aus den Matrizen und Vektoren zu projizieren. Für die Anwendung ist es also nicht notwendig, daß sich der Projektionsvektor explizit angeben läßt.

$$= \sum_{\substack{i=0 \\ k_{p-1} \leq y_i \leq k_p}}^n 2 \frac{d_i - \vec{f}_p(y_i) \vec{l}}{\sigma_i^2} (\vec{f}_p(y_i) \vec{v}_j) \quad (6.25)$$

mit  $1 \leq p \leq m, \quad 0 \leq j \leq m$

Man hat somit ein Gleichungssystem, das die  $l_j$  eindeutig bestimmt, sofern in jedem Spline-Intervall mindestens ein Meßpunkt liegt. Das Gleichungssystem besteht aus  $m+1$  Zeilen der Form:

$$\left( \sum_{\substack{i=0 \\ k_{p-1} \leq y_i \leq k_p}}^n \frac{(\vec{f}_p(y_i) \vec{v}_j)}{\sigma_i^2} \vec{f}_p(y_i) \right) \vec{l} = \sum_{\substack{i=0 \\ k_{p-1} \leq y_i \leq k_p}}^n \frac{\vec{f}_p(y_i) \vec{v}_j}{\sigma_i^2} d_i \quad (6.26)$$

mit  $1 \leq p \leq m, \quad 0 \leq j \leq m$

Man berechnet für alle Meßpunkte die  $\vec{f}_p(y_i)$  mit Glg. (6.22), führt die Summationen von (6.26) aus, füllt die Vektoren in eine Matrix und löst das Gleichungssystem. Als Ergebnis erhält man die gesuchten  $l_j$ , die dann in (6.23) einsetzen werden.

Die Vorteile der angepaßten Spline-Funktion sind:

- Durch die fast freie Wahl der Anzahl der Knoten kann man den Glättungsgrad der Spline-Funktion in weiten Bereichen variieren, das heißt die Empfindlichkeit auf lokale Variationen läßt sich über einen weiten Bereich steuern. Der Bereich reicht von der interpolierenden Spline-Funktion, die durch jeden einzelnen Meßpunkt geht, bis hin zum dem Fall, wo nur noch ein Spline-Intervall existiert, alle Meßpunkte also an ein Polynom dritter Ordnung angepaßt werden.
- Die Position der Knoten kann frei gewählt werden. So können die Meßpunkte nicht und die Knoten trotzdem äquidistant verteilt sein. Die Meßpunkte müssen auch nicht immer an den gleichen Positionen liegen, während die Knoten festgelegt sind.
- Die Anzahl der Meßpunkte und ihre Lage unterliegen nur der Beschränkung, daß zwischen zwei Knoten immer mindestens ein Meßpunkt liegen muß.

In Abbildung 6.6 ist eine Spline-Funktion dargestellt, die an die in den Abbildungen 6.1 bis 6.4 verwendeten Meßpunkte angepaßt worden ist.

## 6.2.4 Kombination von zwei eindimensionalen Spline-Funktionen zu einer zweidimensionalen Spline-Funktion

Um eine Fläche zu interpolieren, braucht man eine zweidimensionale Spline-Funktion. Einen Weg, eine zweidimensionalen Spline herzuleiten, zeigt Gleichung (6.23), vorausgesetzt, die Meßpunkte sind auf parallele Linien verteilt.

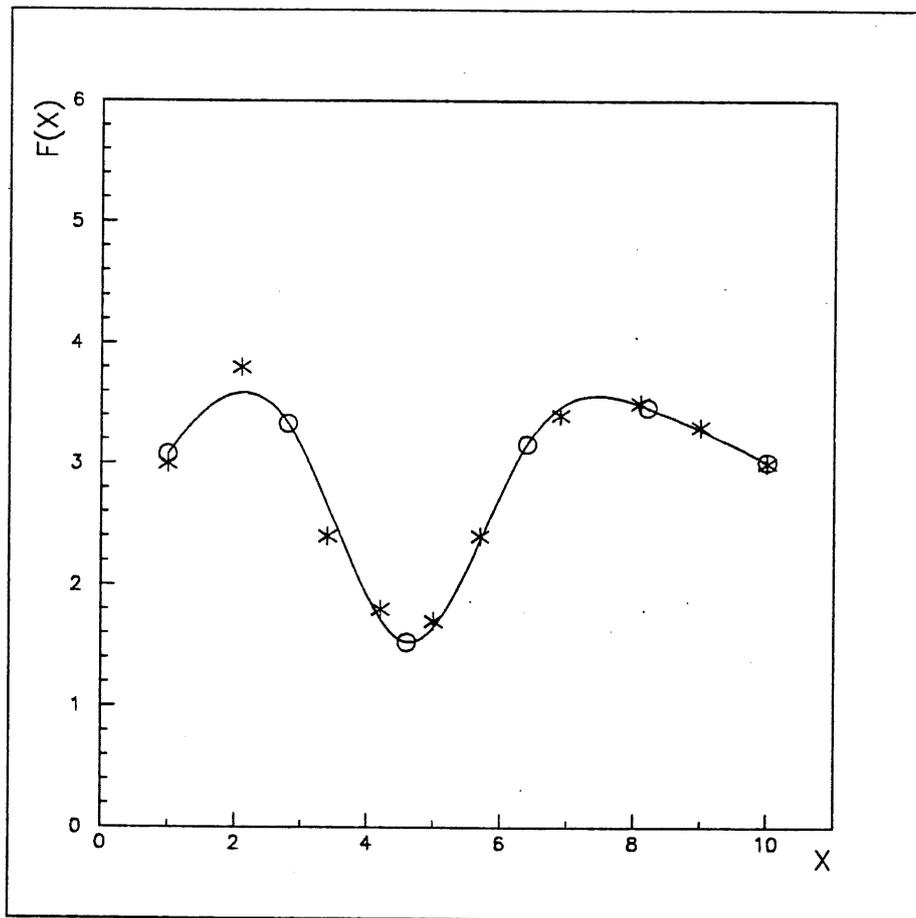


Abbildung 6.6: An die in den Abbildungen 6.1 bis 6.4 verwendeten Meßpunkte angepaßte Spline-Funktion. Die Meßpunkte sind mit Kreuzen markiert, die Knoten mit Kreisen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Linien parallel zur Y-Achse<sup>3</sup>. Für jede Linie sei eine eindimensionale Spline-Funktion bestimmt, die einen Funktionswert für die Variable  $y$  liefert, im Folgenden als  $z$  bezeichnet. Diese Werte bilden zusammen mit den Positionen der Linien bezüglich der X-Achse Stützstellen für die Bestimmung einer eindimensionalen Spline-Funktion in X-Richtung, mit der dann der gesuchte Wert  $s(x, y)$  bestimmt wird.

Sei  $\vec{g}$  ein Vektor mit den Werten der einzelnen Linien für  $y$  als einzelne Komponenten, dann gilt mit Gleichung (6.23):

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \vec{f}_i \vec{g} \\ &= \vec{f}_i(x) \vec{g}(y) \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$k'_{i-1} \leq x \leq k'_i$$

Die Knoten  $k'$  entsprechen den Positionen der Meßlinien auf der X-Achse.

Der große Nachteil der Methode in dieser Form liegt in dem Rechenaufwand. Für einen Wert von  $s(x, y)$  sind (Anzahl der Linien + 1) Splinewerte zu berechnen. Durch Umformungen läßt sich dieser Nachteil aber beseitigen, wie in Abschnitt 6.2.5 gezeigt wird.

Der große Vorteil liegt in der Unabhängigkeit der für die Linien verwendeten Spline-Algorithmen und demjenigen für die X-Richtung. Der Spline-Algorithmus kann sogar für jede Linie anders sein, die Spline-Funktion muß nicht einmal denselben Grad haben.

Bei den in dieser Arbeit verwendeten Dicken- und Gap-Meßdaten liegen die Meßpunkte in Y-Richtung auf Linien, im folgenden als Meßlinien bezeichnet, nah beieinander, während die Meßlinien in X-Richtung relativ große Abstände voneinander haben. Die Meßlinien sind daher an eine Spline-Funktion angepaßt, um lokale Abweichungen zu glätten, was in X-Richtung aufgrund der Abstände und der geringen Anzahl der Meßlinien nicht vorteilhaft ist. Für die X-Richtung wird daher eine interpolierende kubische Spline-Funktion verwendet.

### 6.2.5 Auflösung der impliziten Gleichung nach den Variablen $x$ und $y$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird im Folgenden angenommen, daß die Linien an den jeweils gleichen Y-Positionen beginnen und enden und daß bei jeder Linie derselbe Spline-Algorithmus verwendet wird, also insbesondere die Anzahl und Positionen der Knoten gleich sind<sup>4</sup>.

<sup>3</sup>Dieser Fall ist durch eine Koordinatentransformation immer zu erreichen

<sup>4</sup>Ist dieses nicht der Fall, erhöht sich nur die Anzahl der Teilflächen, ansonsten gibt es keine Änderungen.

Da eine kubische Spline-Funktion in jedem Spline-Intervall sich nach Definition als ein Polynom dritter Ordnung darstellen läßt, ist es möglich, die impliziten Gleichungen, besonders (6.27), nach den Variablen  $x$  und  $y$  aufzulösen. Die durch den zweidimensionalen Spline interpolierte Fläche zerfällt in Teilflächen, die jeweils durch ein Polynom beschrieben werden. Im eindimensionalen Fall hat das Polynom die Form  $A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$ . Weil bei der zweidimensionalen Spline-Funktion keine Dimension gegenüber der anderen besonders ausgezeichnet ist, kann aus Symmetriegründen das Polynom für eine Teilfläche nur die Form  $A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4y + A_5xy + A_6x^2y + A_7x^3y + A_8y^2 + A_9xy^2 + A_{10}x^2y^2 + A_{11}x^3y^2 + A_{12}y^3 + A_{13}xy^3 + A_{14}x^2y^3 + A_{15}x^3y^3$  haben. Die  $4 \cdot 4 = 16$  Koeffizienten müssen nur einmal berechnet und können dann gespeichert werden. Jede Berechnung von  $s(x, y)$  in dieser Teilfläche beschränkt sich danach auf das Einsetzen in das Polynom, wodurch der Nachteil des großen Rechenaufwandes beseitigt ist.

Betrachtet man bei Gleichung (6.27) die Abhängigkeiten von den Variablen  $x$  und  $y$ , so sieht man, das  $\vec{f}_i(x)$  nur von  $x$  und  $\vec{g}_j(y)$  nur von  $y$  abhängt. Dem Vektor  $\vec{g}$  wird der Index  $j$  hinzugefügt und man erhält folgende Gleichung:

$$s_{ij}(x, y) = \vec{f}_i(x) \vec{g}_j(y) \quad (6.28)$$

mit

$$\begin{aligned} k'_{i-1} \leq x \leq k'_i & \quad 1 \geq i \geq \text{Anzahl der Spline-Intervalle in X-Richtung} \\ k_{j-1} \leq y \leq k_j & \quad 1 \geq j \geq \text{Anzahl der Spline-Intervalle in Y-Richtung} \end{aligned}$$

wobei die  $k'_i$  die Positionen der Knoten des Splines in X- und  $k_j$  in Y-Richtung sind.

Der Vektor  $\vec{f}_i$  ist nach der Variablen  $x$  aufzulösen. Dazu geht man von Gleichung (6.22) aus.

$$\vec{f}_i(x) = f_{i1}(x)\vec{v}_{i1} + f_{i2}(x)\vec{v}_i + f_{i3}\vec{v}_i + f_{i4}\vec{v}_{i-1}$$

mit (siehe Gleichungen (6.16) bis (6.20))

$$\begin{aligned} f_{i1}(x) &= -\frac{1}{6h'_i}(x^3 - 3x^2k'_i + 3xk'^2_i - k'^3_i) + \frac{h'_i}{6}(x - k'_i) \\ &= \underbrace{-\frac{1}{6h'_i}}_{=:a_{i14}}x^3 + \underbrace{\frac{k'_i}{2h'_i}}_{=:a_{i13}}x^2 + \underbrace{\left(\frac{h'_i}{6} - \frac{k'^2_i}{2h'_i}\right)}_{=:a_{i12}}x + \underbrace{\frac{1}{6h'_i}(k'^3_i - k'_ih'^2_i)}_{=:a_{i11}} \\ &= a_{i14}x^3 + a_{i13}x^2 + a_{i12}x + a_{i11} \\ f_{i2}(x) &= \frac{1}{6h'_i}(x^3 - 3x^2k'_{i-1} + 3xk'^2_{i-1} - k'^3_{i-1}) - \frac{h'_i}{6}(x - k'_{i-1}) \\ &= \frac{1}{6h'_i}x^3 - \frac{k'_{i-1}}{2h'_i}x^2 - \left(\frac{h'_i}{6} - \frac{k'^2_{i-1}}{2h'_i}\right)x - \frac{1}{6h'_i}(k'^3_{i-1} - k'_{i-1}h'^2_i) \\ &=: a_{i24}x^3 + a_{i23}x^2 + a_{i22}x + a_{i21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{i3}(x) &= \frac{1}{h'_i}x - \frac{k'_{i-1}}{h'_i} \\
&=: a_{i32}x + a_{i31} \\
f_{i4}(x) &= -\frac{1}{h'_i}x + \frac{k'_i}{h'_i} \\
&=: a_{i42}x + a_{i41}
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\vec{f}_i(x) &= (a_{i14}x^3 + a_{i13}x^2 + a_{i12}x + a_{i11})\vec{v}_{i-1}\mathcal{C} \\
&\quad + (a_{i24}x^3 + a_{i23}x^2 + a_{i22}x + a_{i21})\vec{v}_i\mathcal{C} \\
&\quad + (a_{i32}x + a_{i31})\vec{v}_i + (a_{i42}x + a_{i41})\vec{v}_{i-1} \\
&= \underbrace{(a_{i14}\vec{v}_{i-1}\mathcal{C} + a_{i24}\vec{v}_i\mathcal{C})}_{=: \vec{a}_{i4}} x^3 \\
&\quad + \underbrace{(a_{i13}\vec{v}_{i-1}\mathcal{C} + a_{i23}\vec{v}_i\mathcal{C})}_{=: \vec{a}_{i3}} x^2 \\
&\quad + \underbrace{(a_{i12}\vec{v}_{i-1}\mathcal{C} + a_{i22}\vec{v}_i\mathcal{C} + a_{i32}\vec{v}_i + a_{i42}\vec{v}_{i-1})}_{=: \vec{a}_{i2}} x \\
&\quad + \underbrace{(a_{i11}\vec{v}_{i-1}\mathcal{C} + a_{i21}\vec{v}_i\mathcal{C} + a_{i31}\vec{v}_i + a_{i41}\vec{v}_{i-1})}_{=: \vec{a}_{i1}} \\
&= \vec{a}_{i4}x^3 + \vec{a}_{i3}x^2 + \vec{a}_{i2}x + \vec{a}_{i1}
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Somit existiert für jedes Spline-Intervall in X-Richtung ein Satz von vier Vektoren  $\vec{a}_i$ , die nicht mehr von der Variablen  $x$  abhängig sind.

Der Vektor  $\vec{g}_j(y)$  ist nach der Variablen  $y$  aufzulösen. Der Vektor besteht aus den berechneten Werten für die verschiedenen Linien bei der Position  $y$ . Im Folgenden wird eine beliebige Komponente  $q$  des Vektors betrachtet. Es gilt nach Gleichung (6.21):

$$g_{jq}(y) = f_{jq1}(y)s''_{j-1q} + f_{jq2}(y)s''_{jq} + f_{jq3}(y)l_{jq} + f_{jq4}l_{j-qk} \tag{6.30}$$

wobei  $j$  der Index für das Spline-Intervall ist:  $k_{j-1} \leq y \leq k_j$ ,  $q$  für die Linie steht, deren Spline betrachtet wird, und  $l_{jq}$  der Stützwert am  $j$ -ten Knoten vom Spline der Linie  $q$  ist.

$$\begin{aligned}
f_{jq1}(y) &= -\frac{1}{6h_{jq}}(y^3 - 3y^2k_{jq} + 3yk_{jq}^2 - k_{jq}^3) + \frac{h_{jq}}{6}(y - k_{jq}) \\
&= -\frac{1}{6h_{jq}}y^3 + \frac{k_{jq}}{2h_{jq}}y^2 + \left(\frac{h_{jq}}{6} - \frac{k_{jq}^2}{2h_{jq}}\right)y + \frac{1}{6h_{jq}}(y_{jq}^3 - k_{jq}h_{jq}^2) \\
&=: e_{jq14}y^3 + e_{jq13}y^2 + e_{jq12}y + e_{jq11} \\
f_{jq2}(y) &= \frac{1}{6h_{jq}}(y^3 - 3y^2k_{j-1q} + 3yk_{j-1q}^2 - k_{j-1q}^3) - \frac{h_{jq}}{6}(y - k_{j-1q}) \\
&= \frac{1}{6h_{jq}}y^3 - \frac{k_{j-1q}}{2h_{jq}}y^2 - \left(\frac{h_{jq}}{6} - \frac{k_{j-1q}^2}{2h_{jq}}\right)y - \frac{1}{6h_{jq}}(k_{j-1q}^3 - k_{j-1q}h_{jq}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& =: e_{jq24}y^3 + e_{jq23}y^2 + e_{jq22}y + e_{jq21} \\
f_{jq3}(y) & = \frac{1}{h_{jq}}y - \frac{k_{j-1q}}{h_{jq}} \\
& =: e_{jq32}y + e_{jq31} \\
f_{jq4}(y) & = -\frac{1}{h_{jq}}y + \frac{k_{jq}}{h_{jq}} \\
& =: e_{jq42}y + e_{jq41}
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen, in (6.30) eingesetzt, ergeben:

$$\begin{aligned}
g_{jq}(y) & = (e_{jq14}s''_{j-1q} + e_{jq24}s''_{jq})y^3 \\
& + (e_{jq13}s''_{j-1q} + e_{jq23}s''_{jq})y^2 \\
& + (e_{jq12}s''_{j-1q} + e_{jq22}s''_{jq} + e_{jq32}l_{jq} + e_{jq42}l_{j-1q})y \\
& + (e_{jq11}s''_{j-1q} + e_{jq21}s''_{jq} + e_{jq31}l_{jq} + e_{jq41}l_{j-1q}) \\
& =: b_{jq4}y^3 + b_{jq3}y^2 + b_{jq2}y + b_{jq1}
\end{aligned} \tag{6.31}$$

$\vec{b}_{j1}$  ist definiert als ein Vektor, der als q-te Komponente  $b_{jq1}$  hat, und analog sind die Vektoren  $\vec{b}_{j2}$ ,  $\vec{b}_{j3}$  und  $\vec{b}_{j4}$  definiert. Diese Vektoren sind nicht mehr von der Variablen  $y$  abhängig. Der Vektor  $\vec{g}_j(y)$  läßt dann darstellen als

$$\vec{g}_j(y) = \vec{b}_{j4}y^3 + \vec{b}_{j3}y^2 + \vec{b}_{j2}y + \vec{b}_{j1} \tag{6.32}$$

Damit ist Gleichung (6.28) nach den Variablen  $x$  und  $y$  aufgelöst und hat die Form

$$s_{ij}(x, y) = \underbrace{(\vec{a}_{i4}x^3 + \vec{a}_{i3}x^2 + \vec{a}_{i2}x + \vec{a}_{i1})}_{\vec{f}_i(x)} \underbrace{(\vec{b}_{j4}y^3 + \vec{b}_{j3}y^2 + \vec{b}_{j2}y + \vec{b}_{j1})}_{\vec{g}_j(y)} \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned}
& = \vec{a}_{i1}\vec{b}_{j1} + \vec{a}_{i2}\vec{b}_{j1}x + \vec{a}_{i3}\vec{b}_{j1}x^2 + \vec{a}_{i4}\vec{b}_{j1}x^3 \\
& + \vec{a}_{i1}\vec{b}_{j2}y + \vec{a}_{i2}\vec{b}_{j2}xy + \vec{a}_{i3}\vec{b}_{j2}x^2y + \vec{a}_{i4}\vec{b}_{j2}x^3y \\
& + \vec{a}_{i1}\vec{b}_{j3}y^2 + \vec{a}_{i2}\vec{b}_{j3}xy^2 + \vec{a}_{i3}\vec{b}_{j3}x^2y^2 + \vec{a}_{i4}\vec{b}_{j3}x^3y^2 \\
& + \vec{a}_{i1}\vec{b}_{j4}y^3 + \vec{a}_{i2}\vec{b}_{j4}xy^3 + \vec{a}_{i3}\vec{b}_{j4}x^2y^3 + \vec{a}_{i4}\vec{b}_{j4}x^3y^3
\end{aligned} \tag{6.34}$$

$$\begin{aligned}
& =: A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4y + A_5xy \\
& + A_6x^2y + A_7x^3y + A_8y^2 + A_9xy^2 + A_{10}x^2y^2 \\
& + A_{11}x^3y^2 + A_{12}y^3 + A_{13}xy^3 + A_{14}x^2y^3 + A_{15}x^3y^3
\end{aligned} \tag{6.35}$$

und die sechzehn gesuchten Koeffizienten sind bestimmt.

### 6.3 Inter- und Extrapolation von Flächen

Die Spline-Funktionen ermöglichen es, Flächen gut zu interpolieren. Allerdings kann nicht die gesamte Fläche einer Kalorimeterplatte direkt mit den Meßwerten interpoliert

werden, weil am Rand der Fläche keine Meßpunkte liegen. Daher muß auch extrapoliert werden. Ziel ist es nun, beides in Einklang zu bringen, um eine einheitliche Beschreibung der gesamten Fläche zu ermöglichen.

Die Idee ist, die Rekonstruktion der Fläche in zwei Stufen aufzubauen. In der ersten Stufe werden für die Fläche, die aufgrund der Meßdaten interpoliert werden kann, die Spline-Funktionen bestimmt. Die Meßdaten werden zuerst auf ihre Vollständigkeit hin überprüft. Sind mehr als drei Meßlinien unvollständig, wird die Rekonstruktion ganz abgebrochen. Diese Meßlinien werden dann per Hand restauriert. Die vollständigen Meßlinien werden an eine eindimensionale kubische Spline-Funktion angepaßt, mit deren Hilfe die fehlenden Meßpunkten der unvollständigen Linien inter- oder extrapoliert werden. Diese werden danach auch an eine eindimensionale kubische Spline-Funktion angepaßt. Die verbleibende Fläche wird dann mit verschiedenen, auf die Lage der Fläche abgestimmten Extrapolationsmethoden beschrieben, die dabei auch auf die Informationen der Spline-Funktionen zurückgreifen.

In der zweiten Stufe werden den Meßpunkten durch Extrapolation „Pseudomeßpunkte“ hinzugefügt. Diese liegen so, daß die gesamte Fläche der Kalorimeterplatte mit den oben hergeleiteten Spline-Funktionen interpoliert werden kann. Die Meßlinien werden nach beiden Richtungen hin verlängert und an den beiden Rändern der Platte zwei neue „Meßlinien“ bestimmt. Die „Meßfehler“ dieser Pseudomeßpunkte sind gegenüber den Meßfehlern der normalen Meßpunkte soweit hochgesetzt, daß bei der anschließenden kubischen Spline-Anpassung die Pseudomeßpunkte das Aussehen der Spline-Funktion zwischen den normalen Meßpunkten nicht beeinflussen. Die gesamte Plattenfläche liegt nun innerhalb der Meßlinien und somit kann die gesamte Fläche durch eine einzige zweidimensionale Spline-Funktion beschrieben werden.

Die Extrapolation wird im folgenden Abschnitt behandelt. Es werden nur einzelne Punkte extrapoliert, nicht ganze Flächen. Die Extrapolationsmethode braucht daher nur eindimensional zu sein, obwohl sie für eine ganze Fläche angewendet wird. Im Folgenden steht der Ausdruck „interpolierte Fläche“ für die Fläche, welche durch die Spline-Funktionen in der ersten Stufe beschrieben wird. Weitere Anforderungen an die Extrapolationsmethode sind

- Die Extrapolation muß an die interpolierte Fläche stetig anschließen. Der Übergang von der interpolierten zur extrapolierten Fläche sollte auch in der ersten Ableitung stetig sein.
- Die Extrapolationsmethode sollte möglichst alle verfügbaren Daten verwenden. Die Methode muß daher sehr flexibel sein, weil zum Beispiel mehrere Seiten der extrapolierten Fläche an die interpolierte Fläche oder Flächen mit anderen Extrapolationsmethoden grenzen können.

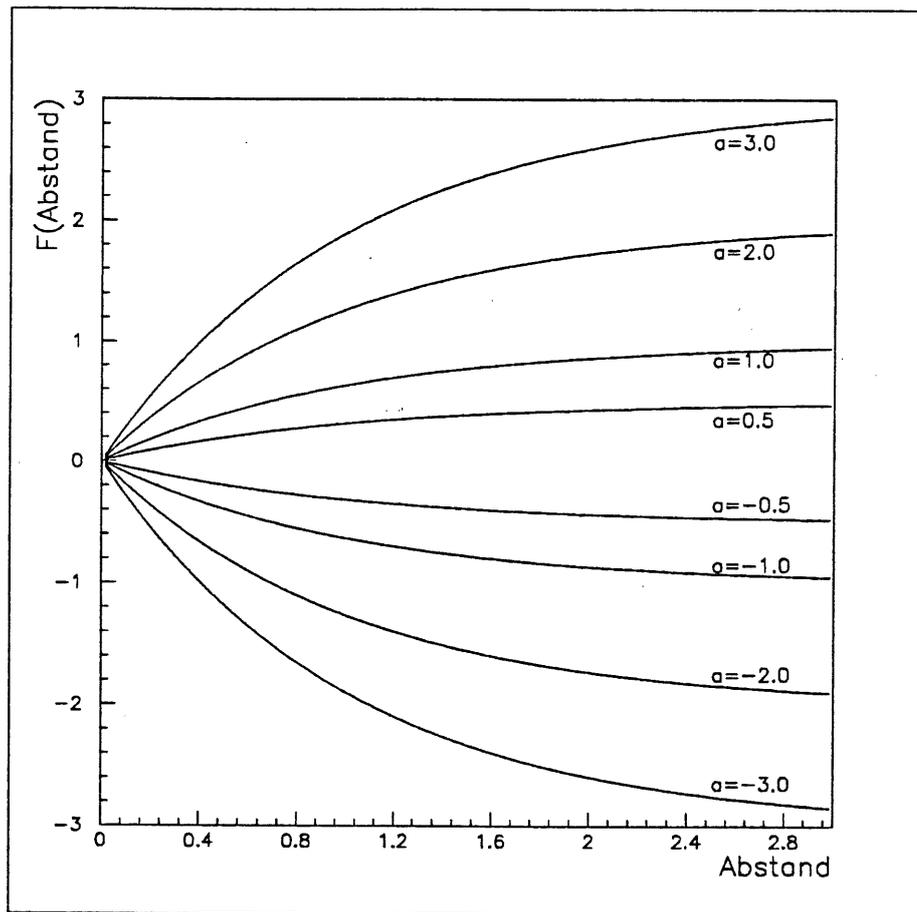


Abbildung 6.7: Die exponentielle Extrapolationsfunktion  $f(l) = a * (1 - e^{-l}) + b$  für verschiedene Werte von  $a$ . Der konstante Term  $b$  ist immer gleich Null. Auf der X-Achse ist  $l$  aufgetragen, auf der Y-Achse der Funktionswert  $f(l)$ .

- Bei Extrapolationen über größere Bereiche sollten die Funktionswerte in dem Bereich der Meßwerte bleiben.

Die einfachste Extrapolation, die die ersten Bedingungen erfüllt, ist die lineare Extrapolation in der Form  $ax + b$ . Der große Nachteil ist das Verhalten bei Extrapolationen über weite Strecken. Die dritte Anforderung ist nur bei sehr kleinen Steigungen erfüllt. Wird stattdessen die Funktion  $f(l) = a * (1 - e^{-l}) + b$  benutzt, ergibt sich dieses Problem nicht. Die Variable  $l$  ist gleich dem Abstand des zu extrapolierenden Punktes zu dem nächsten Punkt auf der durch Interpolation bestimmten Fläche. Für kleine  $l$  ist die Funktion fast linear, während sie bei großen  $l$  sich asymptotisch dem Wert  $a + b$  nähert. Abbildung 6.7 stellt den Verlauf der Funktion für verschiedene Steigungen dar.

Das prinzipielle Vorgehen bei der Extrapolation wird im Folgenden beschrieben. Zuerst wird der zum zu extrapolierenden Punkt nächste Punkt auf der interpolierten Fläche bestimmt. An diesem Punkt, im Folgenden als Referenzpunkt bezeichnet, wird der Funktionswert und die Steigung in Richtung des zu extrapolierenden Punktes bestimmt. Diese

Werte und der Abstand zwischen den Punkten wird in die Extrapolationsfunktion eingesetzt. Sollen mehrere Referenzpunkte berücksichtigt werden, weil zum Beispiel die zu extrapolierende Fläche an zwei Steiten an die interpolierte Fläche grenzt, wird bei allen Punkten wie beschrieben extrapoliert und der mit dem Abstand gewichtete Mittelwert gebildet.

Um die Methode optimal an die Form der interpolierten Fläche anzupassen, wird die zu extrapolierende Fläche in einzelne Regionen unterteilt, die sich in der verwendeten Extrapolationsmethode unterscheiden. In Abbildung 6.8 ist die Regioneneinteilung für die FB2E-Gapmeßdaten dargestellt.

Die einzelnen Meßlinien sind als dicke schwarze Linien gezeichnet. In der Mitte befindet sich die mit 1 bezeichnete Region, in der direkt die Spline-Funktion angewendet wird. In den mit 2 bezeichneten Regionen wird der Referenzpunkt in Y-Richtung, in den mit 3 bezeichneten Regionen in X-Richtung bestimmt. Der Referenzpunkt der Regionen 4 liegt immer in der Ecke von Region 1. In den Regionen 5 werden zwei Referenzpunkte, einer in X-Richtung und einer in Y-Richtung zur Extrapolation verwendet. Die in den Regionen 7, 8 und 9 benutzten Extrapolationsverfahren sind die gleichen wie in den Regionen 3, 2 und 4, allerdings liegt der Referenzpunkt nicht auf der interpolierten Fläche, sondern in Region 5. Dadurch ist gewährleistet, daß die gesamte Fläche stetig und stetig differenzierbar ist.

## 6.4 Anwendung auf die Plattendicken

Bei den Plattendicken müssen insbesondere die drei verschiedenen Meßmethoden bei FB2E berücksichtigt werden (siehe Kapitel 5). Außerdem sind einige Platten überhaupt nicht gemessen worden.

Die Daten der Maschinenmessung werfen keine Probleme auf. Alle vier Meßlinien sind immer vollständig vorhanden. Um auch die Plattendicke der Messungen mit sechs beziehungsweise neun Punkte bestimmen zu können, wurden sogenannte Referenzlinien bestimmt, indem über die Meßlinien von allen Maschinenmessungen gemittelt wurde. Die absoluten Funktionswerte der Referenzlinien werden bei der Sechspunktmessung einzeln an die Meßwerte der Meßpunkte und bei der Neunpunktmessung an den Mittelwert der neun Meßpunkte unter Berücksichtigung der Position der Meßpunkte angepaßt. Bei den nicht gemessenen Platten werden die Referenzlinien direkt verwendet. Als Meßwerte werden also die Werte der mittleren Platte aller Maschinenmessungen benutzt.

Alle für das BBE-Kalorimeter produzierten Platten sind mit der Dickenmeßapparatur vermessen worden.

Abbildung 6.9 zeigt die Größe und Lage der Anteile der inter- und extrapolierten Fläche an der gesamten aktiven Plattenfläche. Die direkt interpolierte Fläche macht bei FB2E-Platten 67 % der aktiven Gesamtfläche aus, bei BBE-Platten sind es 63 %.

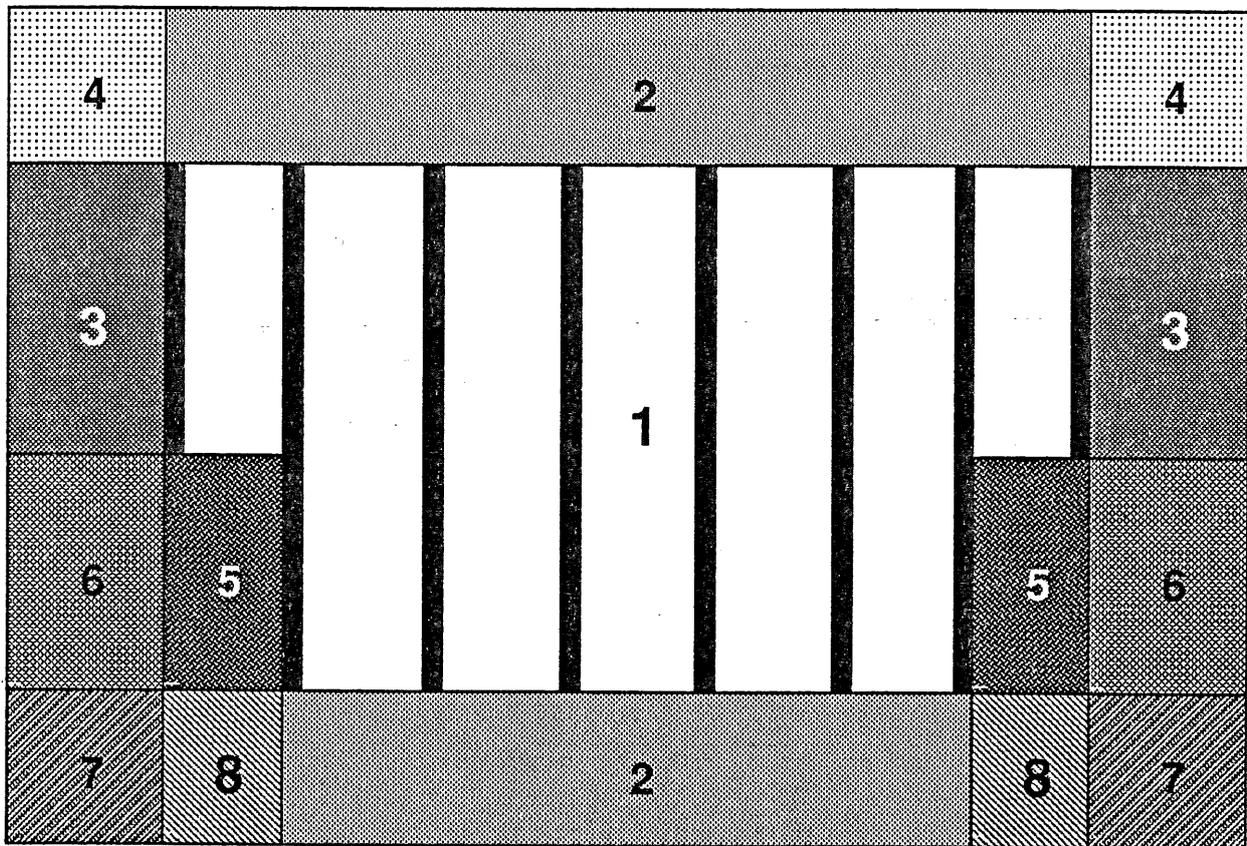


Abbildung 6.8: Region-Einteilung für die Gapmeßdaten von FB2E. Die mit 1 bezeichnete Region wird mit Spline-Funktionen interpoliert, die mit unterschiedlichen Schraffuren gekennzeichneten Regionen verwenden verschiedene Verfahren zur Bestimmung der Referenzpunkte für die Extrapolation.

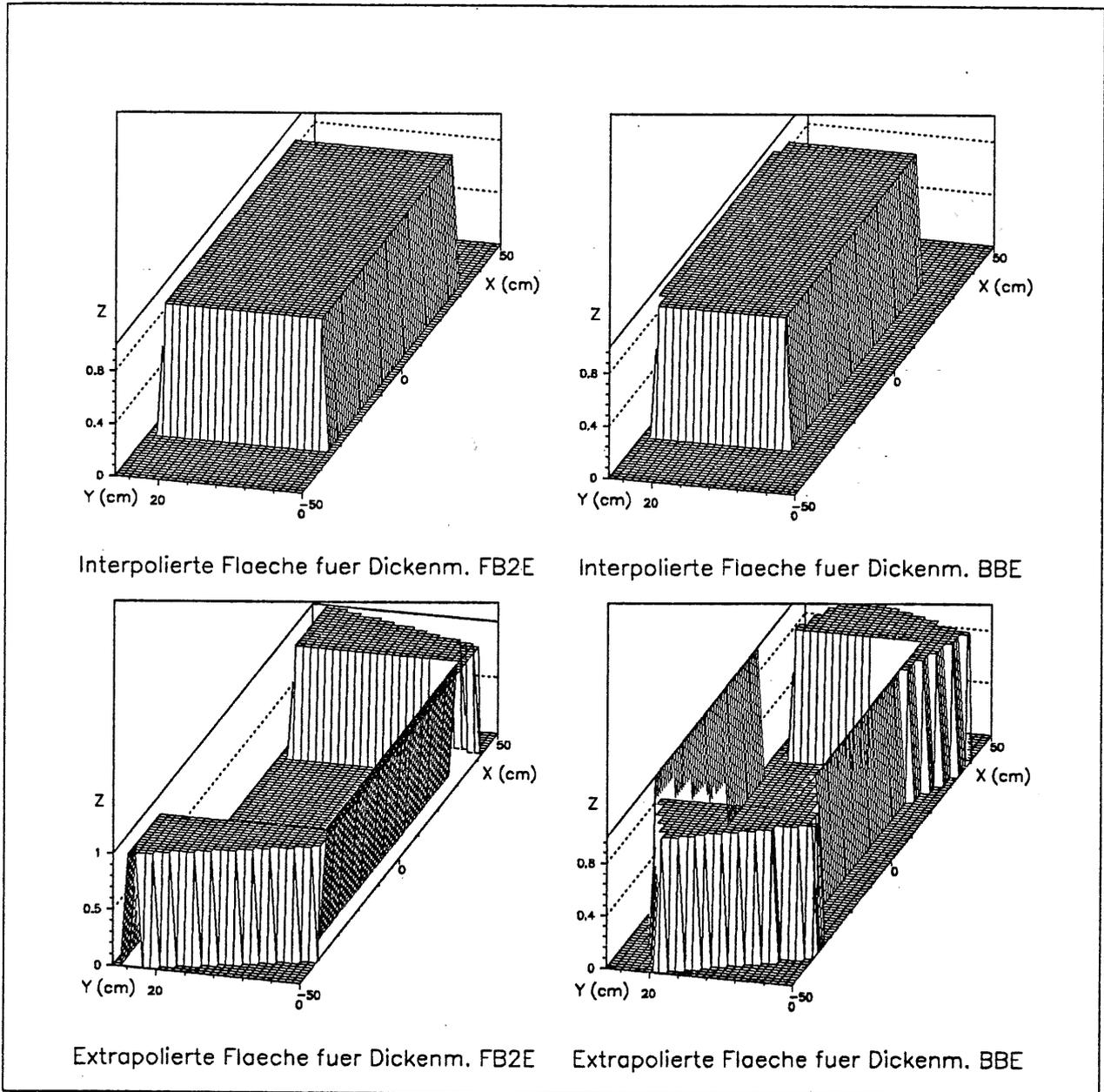


Abbildung 6.9: Größe der inter/extrapolierten Flächen bei der Plattenrekonstruktion.

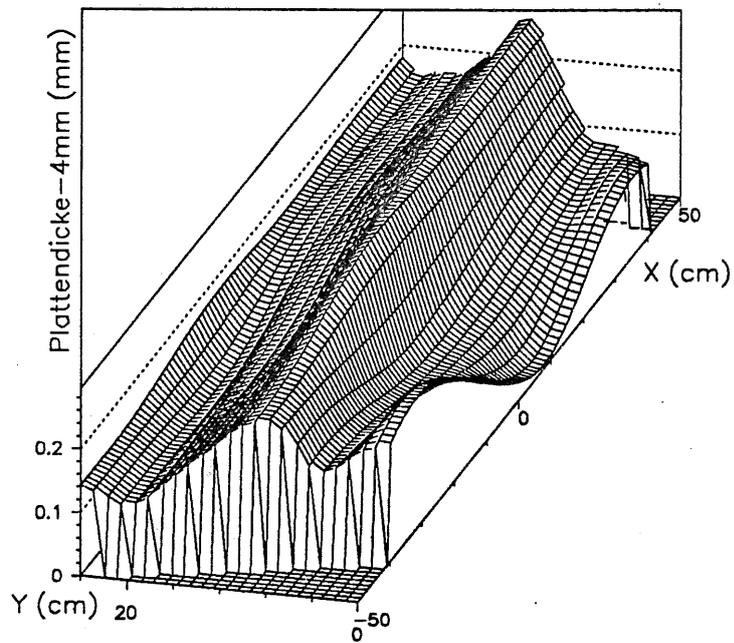
Das Ergebnis der Rekonstruktion ist beispielhaft in Abbildung 6.10 für die in Kapitel 5 gezeigten Messungen zu sehen. Die Formen der Plattendicke sind typisch für die produzierten Platten, allerdings sind die durchschnittlichen Variationen kleiner. Die rekonstruierten Flächen entsprechen der aktiven Auslesefläche der Platten, die Fläche außerhalb ist auf einen konstanten Wert gesetzt worden. Man sieht deutlich, daß die Variationen in Y-Richtung deutlich größer sind als in X-Richtung.

## 6.5 Anwendung auf die Gapbreiten

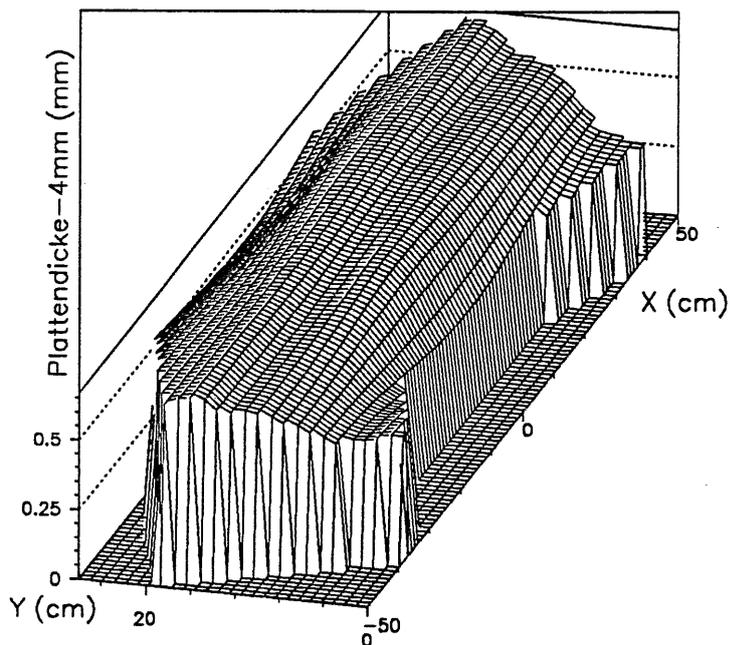
Das Hauptproblem bei der Anwendung der Methode auf die Gapbreiten liegt in unvollständigen oder ganz fehlenden Meßlinien. Sobald die gemessene Gapbreite kleiner als 2 mm ist, wird das Einfahren des Meßkopfes in das Gap abgebrochen und mit der eigentlichen Messung in Zentimeterabständen begonnen. Dadurch sind die Meßpunkte von abgebrochenen Linien meistens in Y-Richtung gegenüber vollständigen Meßlinien versetzt. Dieses Problem tritt auch bei den beiden kurzen Meßlinien bei FB2E auf. Da aber auf die einzelnen Meßlinien die Methode der kubischen Spline-Anpassung angewendet wird, kann die Lage der Knoten für alle Linien trotzdem einheitlich gewählt werden.

In Abbildung 6.11 ist die Größe und Lage der Anteile der inter- und extrapolierte Fläche an der gesamten aktiven Plattenfläche dargestellt. Von der aktiven Gesamtfläche werden bei vollständigen Meßlinien 71 % bei FB2E direkt interpoliert, bei BBE sind es 70 %.

Abbildung 6.12 zeigt als Beispiel die über die gesamte aktiven Plattenfläche rekonstruierte Gapbreite für die in Kapitel 5 gezeigten Messungen eines FB2E- und BBE-Gaps. Die Form der Verteilung der Gapbreiten ist typisch, wenn auch der Unterschied zwischen Maximum und Minimum in der Gapbreite im Durchschnitt kleiner ist.

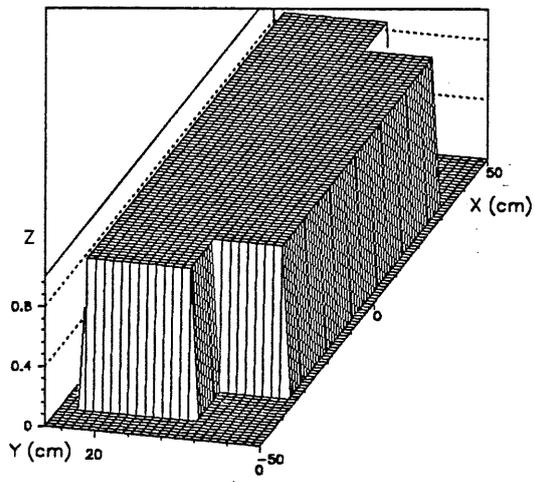


Stack 8, Platte 42

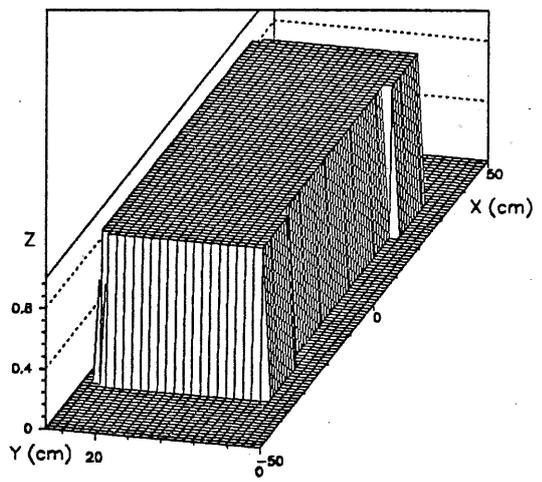


Stack 7, Platte 19

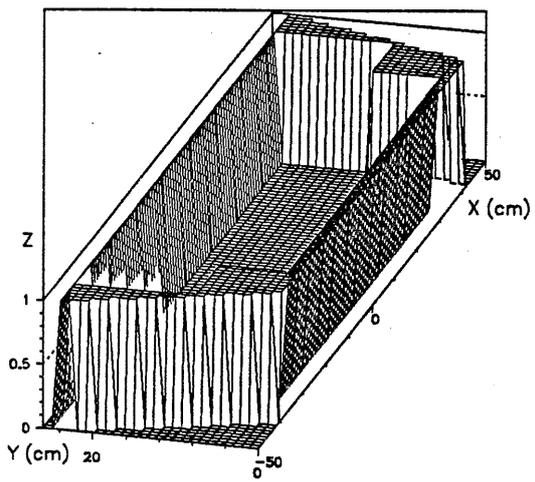
Abbildung 6.10: Aus den in Abbildung 5.5 gezeigten Messungen rekonstruierte Plattendicken. Oben ist die Plattendicke für die FB2E-, unten für die BBE-Platte dargestellt. Die Plattendicke ist jeweils in mm angegeben, der Nullpunkt entspricht einer Plattendicke von 4 mm.



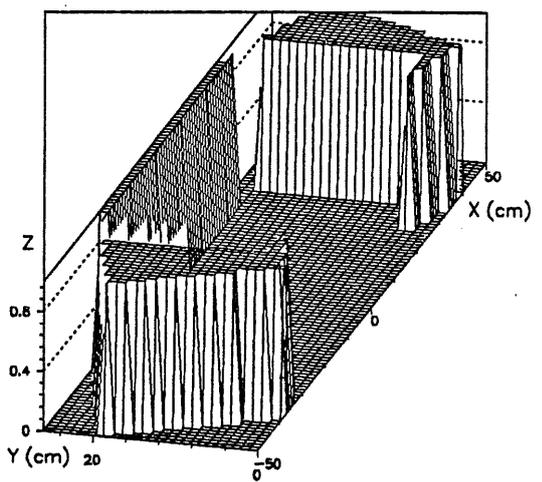
Interpolierte Fläche fuer Gapm. FB2E



Interpolierte Fläche fuer Gapm. BBE

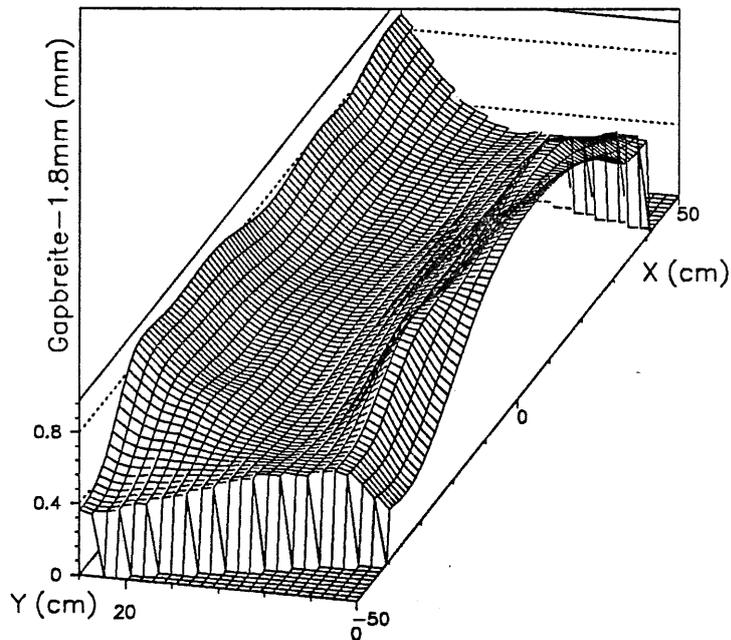


Extrapolierte Fläche fuer Gapm. FB2E

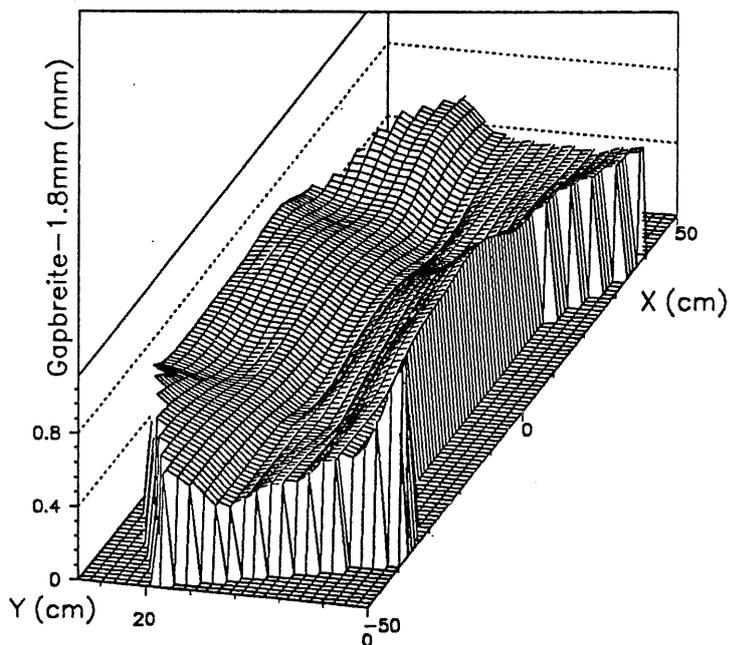


Extrapolierte Fläche fuer Gapm. BBE

Abbildung 6.11: Größe der inter-/extrapolierten Flächen bei der Gaprekonstruktion



Stack 6, Gap 20



Stack 6, Gap 22

Abbildung 6.12: Aus den in Abbildung 5.9 gezeigten Messungen rekonstruierte Gapbreiten. Oben ist die Gapbreite für das FB2E-, unten für das BBE-Gap dargestellt. Die Gapbreite ist jeweils in mm angegeben, der Nullpunkt entspricht einer Gapbreite von 1.8 mm.

# Kapitel 7

## Analysen mit den rekonstruierten Plattendicken und Gapbreiten

Mit den rekonstruierten Dicken der Kalorimeterplatten und Gapbreiten ist es nun möglich, den Einfluß der Variationen auf das Signal des Kalorimeters genauer zu studieren und gegebenenfalls Korrekturfaktoren zu bestimmen. Doch vorher wird die Rekonstruktion selber überprüft, um die Genauigkeit zu bestimmen.

### 7.1 Der Vergleich mit Kontrollmessungen

Das einfachste Verfahren, um die Genauigkeit der Rekonstruktion abzuschätzen, ist der Vergleich mit gemessenen Daten. Da die Gapbreiten stärker variieren als die Plattendicken und es außerdem vom Meßaufbau einfacher ist, zusätzliche Linien zu vermessen, sind die Gapbreiten bei dem FB2E-Stack 8 an den in Abbildung 7.1 dargestellten Positionen von Gap 0 bis Gap 72 einschließlich mit der Gapmeßapparatur bestimmt worden. Die Anzahl der Meßpunkte und die Positionen in Y-Richtung entsprechen denen der Standardmessung, die X-Positionen der Linien sind  $\pm 15.5\text{cm}$  und  $\pm 3\text{cm}$ .

Bei dem folgenden Vergleich werden die beiden äußeren und die beiden inneren Meßlinien getrennt betrachtet. An den Positionen der Meßpunkten der Kontrollmessungen wird die Gapbreite mit den Spline-Funktionen bestimmt und vom Meßwert abgezogen. Die Verteilungen der Differenzen sind in Abbildung 7.2 gezeigt.

Die beiden mittleren Linien liegen möglichst weit von den Meßlinien der Standardmessung entfernt. Die mittlere Differenz, in den Histogrammen oben rechts als Mean bezeichnet, entspricht einer systematischen Abweichung bei der Rekonstruktion der Gapbreiten. Mit einem Wert kleiner als  $0.4\ \mu\text{m}$  können systematische Abweichungen, deren Ursache in der Rekonstruktionsmethode liegen, ausgeschlossen werden. Die mit RMS bezeichnete

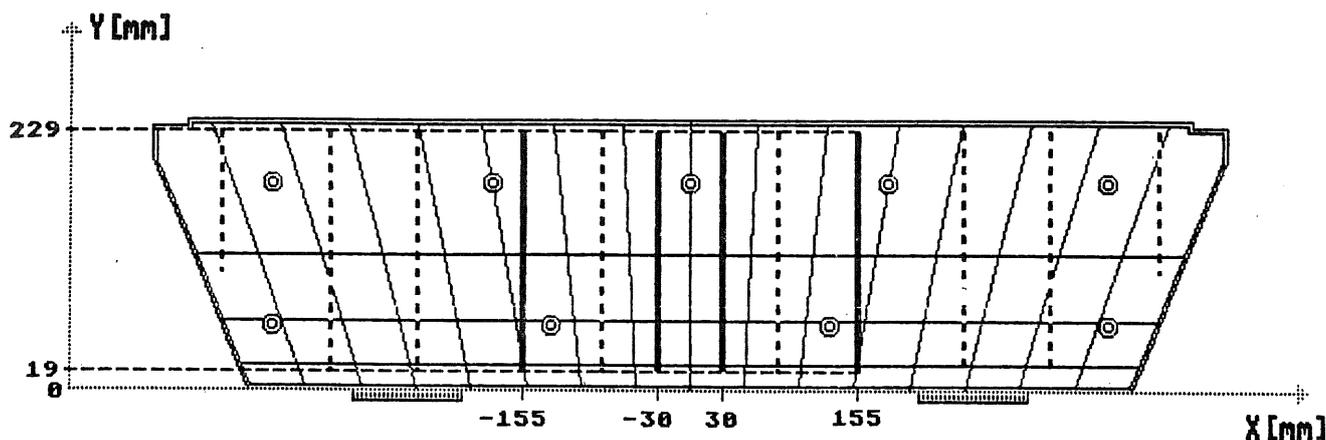


Abbildung 7.1: Lage der Kontrollmessungen

Standardabweichung der Verteilung von  $40\mu\text{m}$  ist ein Maß für die Genauigkeit der Rekonstruktion. Hauptursache für die Größe der Standardabweichung sind lokale Variationen an den Positionen der Meßlinien der Kontrollmessungen, die sogar in der Größenordnung von  $100\mu\text{m}$  liegen können (siehe Abschnitt 7.2).

Für die beiden äußeren Linien der Kontrollmessungen sieht die Verteilung anders aus. Die rekonstruierten Gapbreiten sind systematisch fast  $7\mu\text{m}$  zu klein, die Standardabweichung ist mit  $51\mu\text{m}$  sogar 31 % größer als bei den mittleren Meßlinien. Die Ursachen dafür liegen in der Position der Meßlinien. Die Meßlinien befinden sich genau zwischen zwei Spacern, die die Form des Gaps an den Positionen der beiden äußeren Meßlinien stark beeinflussen. Die beiden nächsten Meßlinien der Standardmessung sind über 5 cm von den Spacern entfernt, wodurch dort die Auswirkungen der Spacer viel geringer sind. Insofern trifft die Verteilung nur auf den Bereich zwischen den beiden Spacern zu und ermöglicht eine Abschätzung der Genauigkeit der Rekonstruktion nach oben.

Insgesamt lassen sich die Ergebnisse der Kontrollmessungen folgendermaßen zusammenfassen:

- Systematische Abweichungen bei der Rekonstruktion der Gapbreiten können vernachlässigt werden. Selbst im ungünstigsten Fall ist die systematische Abweichung immer noch kleiner als der Genauigkeit der Messung der Gapbreiten.
- Die rekonstruierten Gapbreiten haben eine Genauigkeit von etwa  $40\mu\text{m}$  bis  $52\mu\text{m}$ .

Die Ergebnisse zeigen, daß das Ziel der Rekonstruktion, die Form der Gaps zu erhalten, erfüllt wird.

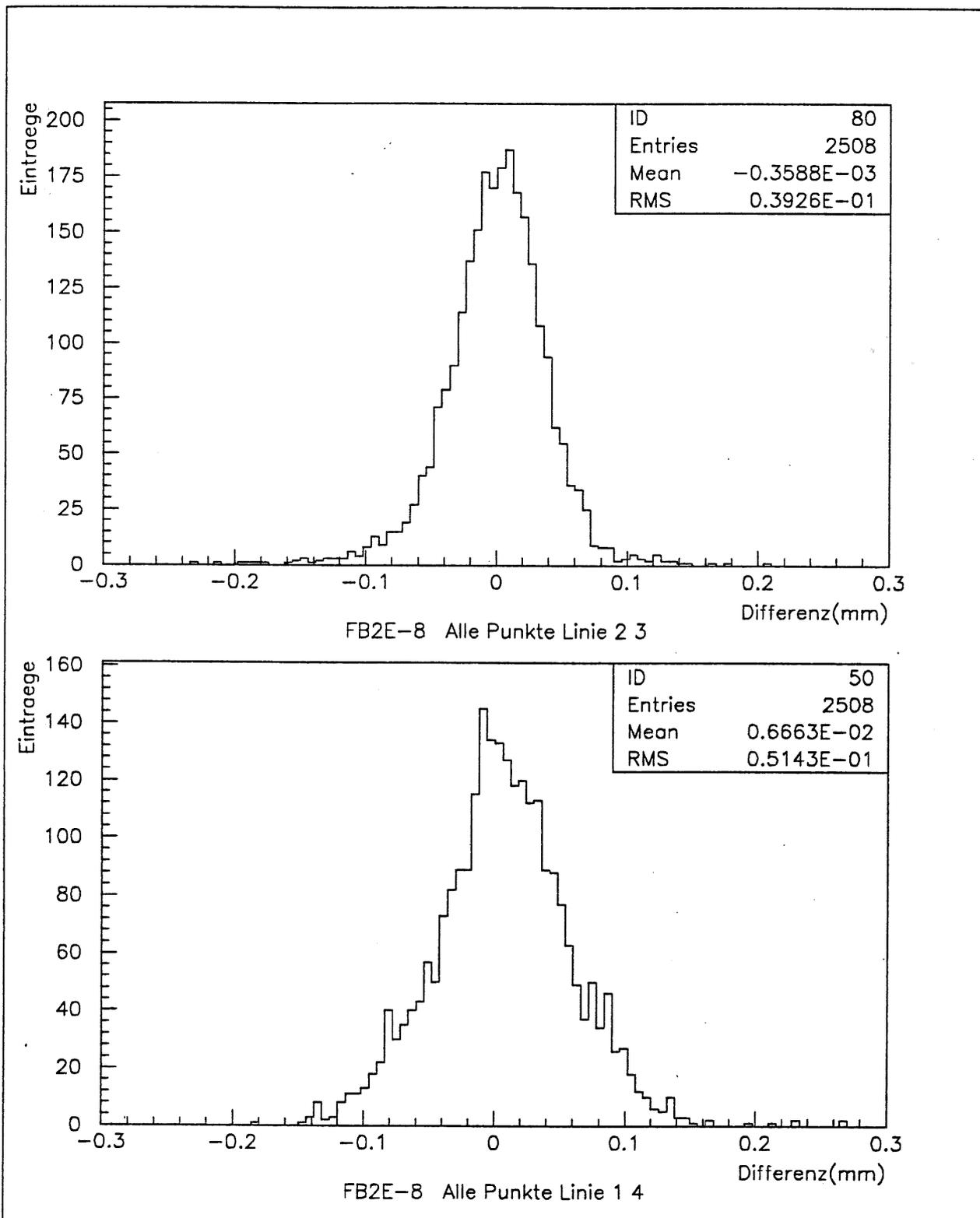


Abbildung 7.2: Verteilung der Differenz von der gemessenen Gapbreite der Kontrollmessungen zur berechneten Gapbreite. Linie 2 und 3 sind die mittleren Meßlinien, 1 und 4 die beiden Äußeren.

## 7.2 Variation der Knotenabstände

Die verwendete Rekonstruktionsmethode paßt in Y-Richtung kubische Spline-Funktionen an die Meßwerte an. Die Knotenabstände und somit auch die Anzahl der Knoten sind dadurch in weiten Bereichen variierbar, wodurch die glättende Wirkung der Spline-Funktionen beeinflusst wird. Um die Auswirkungen zu bestimmen, sind die Spline-Funktionen mit Knotenabständen von 1.5 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm und 7 cm in Y-Richtung bestimmt worden. Die verschiedenen Rekonstruktionen sind dann mit dem in Abschnitt 7.1 beschriebenen Verfahren mit den Kontrollmessungen verglichen worden.

Die Ergebnisse des Vergleichs sind in Abbildung 7.3 dargestellt. In dem Histogramm links oben ist die Anzahl der Intervalle aufgetragen. Während bei einer Schrittweite von 1.5 cm noch 17 Intervalle in Y-Richtung benötigt werden, sind es bei einer Schrittweite von 7 cm nur noch 4 Intervalle. Die Anzahl der Teilflächen und damit auch die Anzahl der Koeffizienten der Spline-Funktionen ändert sich um mehr als einen Faktor 4. Die Variation des Mittelwertes und insbesondere der Standardabweichung sind dagegen sehr gering, bei der Standardabweichung beträgt sie nur etwas über 1%. Im Histogramm rechts unten ist die Verteilung für einen Knotenabstand von 7 cm gezeigt.

Dies bestätigt, daß im Wesentlichen lokale Variationen bei den Kontrollmessungen für die Breite der Verteilung verantwortlich sind, weil bei einem Knotenabstand von 7 cm nur noch die globale Form des Gaps beschrieben wird und lokale Variationen innerhalb der Meßlinien der Standardmessung vernachlässigt werden. Außerdem folgt daraus, daß um die Rekonstruktion wesentlich zu verbessern, prinzipiell mehr Meßdaten benötigt werden.

## 7.3 Vergleich mit dem gewichteten Mittelwert

Eine der in Kapitel 6 vorgestellten Methoden zur Rekonstruktion verwendet den mit dem Abstand gewichteten Mittelwert über alle Meßwerte der Standardmessung. Diese Methode wird bei denjenigen H1-Kalorimetern verwendet, bei denen nur an sehr wenigen Punkten die Gapbreite bestimmt wurde [KUES90]. Daher ist es sinnvoll, die Ergebnisse dieser Methode mit den Kontrollmessungen zu vergleichen.

Die Gapbreite an einem beliebigen Punkt  $(x, y)$  ergibt sich aus:

$$f(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{r_i^p}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i^p}}$$

Die Summe läuft über alle Meßpunkte der Standardmessung. In Abbildung 7.4 ist das in Kapitel 5 gezeigte FB2E-Gap für die Potenzen  $p = 1$  und  $p = 4$  rekonstruiert worden. Man erkennt im Gegensatz zu Abbildung 6.12 deutlich die Position der Meßlinien. Da

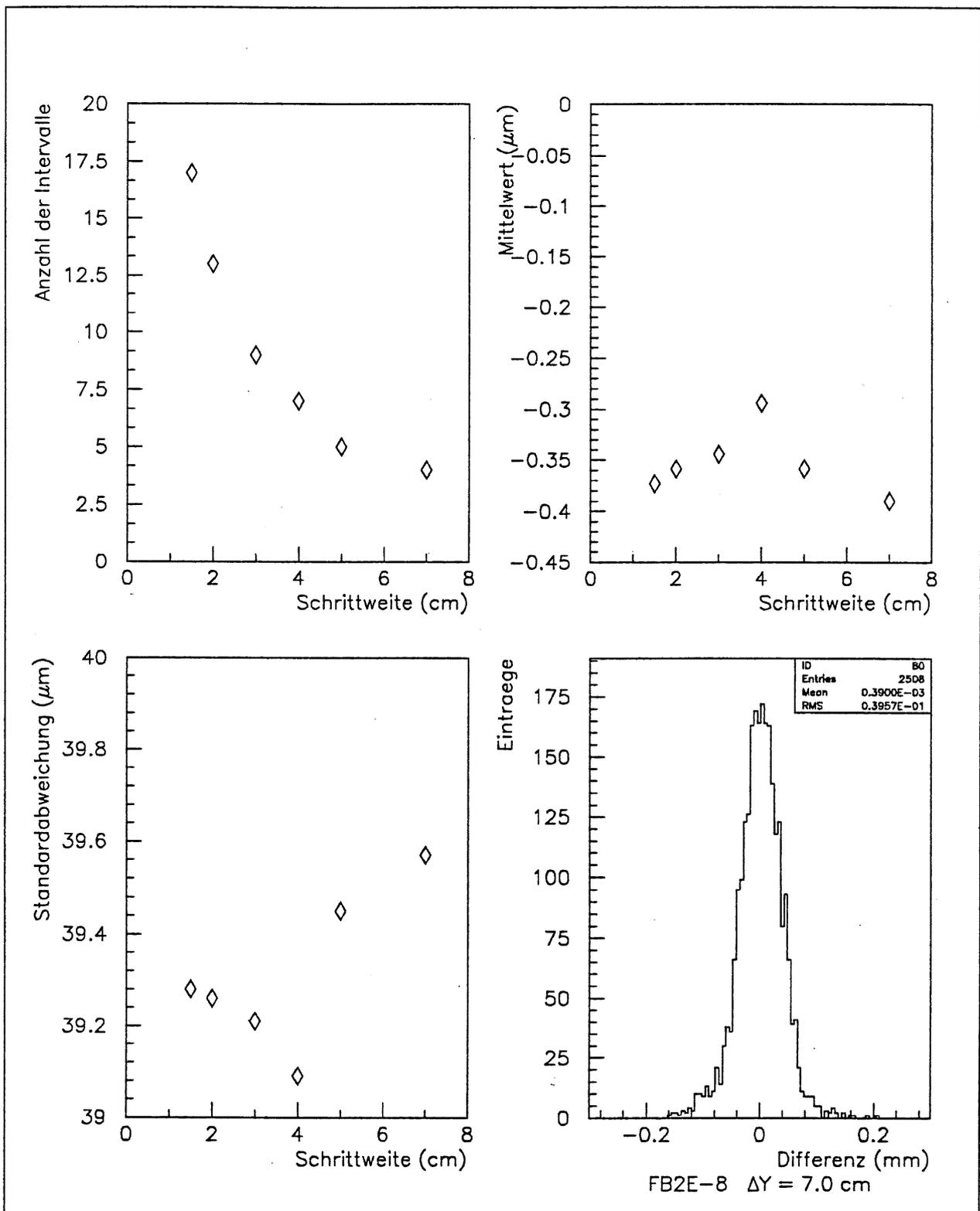


Abbildung 7.3: Vergleich der mit verschiedenen Schrittweiten rekonstruierten Gapbreiten mit den Kontrollmessungen. Im Histogramm links oben ist die Anzahl der Spline-Intervalle in Y-Richtung angegeben, rechts davon die mittlere Differenz zwischen der rekonstruierten und gemessenen Gapbreite. Unten links ist die zugehörige Standardabweichung aufgetragen, und rechts unten die Verteilung der Differenzen bei einer Schrittweite von 7 cm.

Spacer	FB2E		BBE	
	X in cm	Y in cm	X in cm	Y in cm
1	-38.3	6.0	-40.0	16.6
2	-38.3	19.0	-30.6	6.9
3	-18.3	19.0	-20.0	21.5
4	-12.8	6.0	-10.5	9.5
5	0.0	19.0	0.0	21.5
6	12.8	6.0	10.5	9.5
7	18.3	19.0	20.0	21.5
8	38.3	19.0	30.6	6.9
9	38.3	6.0	40.0	16.6

Tabelle 7.1: Positionen der Spacer für FB2E und BBE.

über 158 Punkte gemittelt wird, sind bei der Potenz  $p = 1$  nur direkt an den Positionen der einzelnen Meßlinien Abweichungen von der mittleren Gapbreite zu sehen. Ansonsten ist das rekonstruierte Gap flach. Bei  $p = 4$  sind die Einflüsse von weiter entfernt liegenden Punkten stark unterdrückt. Es bildet sich eine deutliche Wellenstruktur aus, die nicht der tatsächlichen Form des Gaps entspricht.

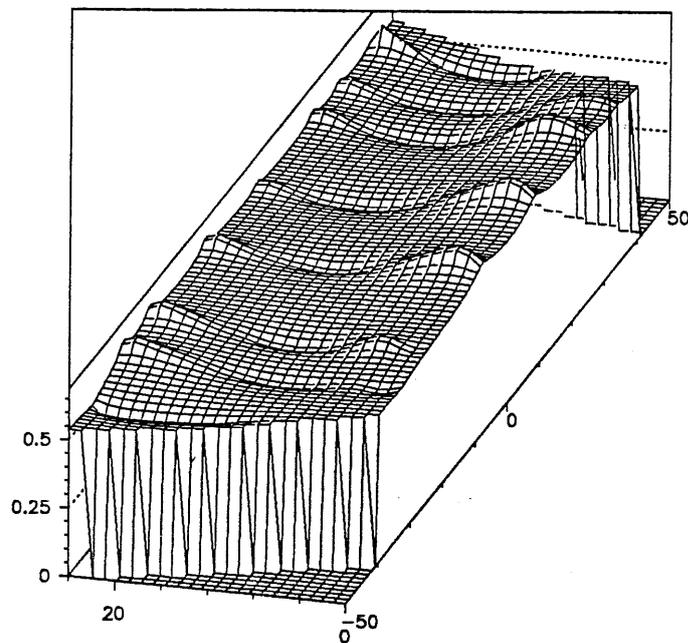
Dies bestätigen auch die Verteilungen der Differenzen von den Meßwerten der Kontrollmessungen und den mit dem gewichteten Mittelwert rekonstruierten Gapbreiten. Abbildung 7.5 zeigt die Verteilungen für  $p$  gleich 0 bis 4. Außerdem ist zum Vergleich die Verteilung für die Rekonstruktion mit Spline-Funktionen abgebildet. Neben der größeren Standardabweichung erhält man bei allen Potenzen eine systematische Abweichung von mehr als  $20 \mu\text{m}$ .

Der Vergleich zeigt, daß das Verfahren mit dem gewichteten Mittelwert nicht nur eine größere Ungenauigkeit hat, sondern insbesondere wegen der systematischen Abweichung zur Rekonstruktion der Plattendicke und Gapbreiten unbrauchbar ist. Bei denjenigen Kalorimetern, wo aufgrund der geringen Anzahl der Meßpunkte nur diese Methode angewendet werden kann, wird global die ermittelte systematische Abweichung bei jedem rekonstruierten Wert abgezogen [KUES90].

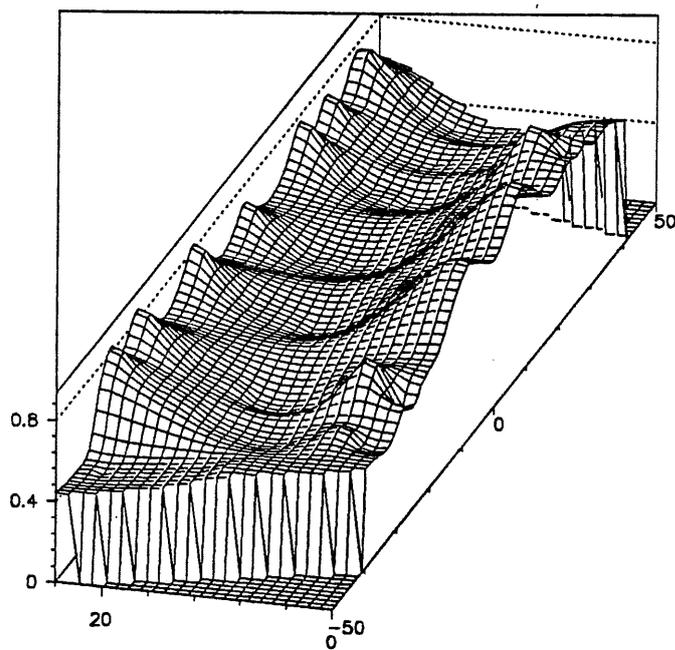
## 7.4 Die Spacer

Eine weitere Überprüfung der Spline-Funktionen ist mit den Spacern möglich. In jedem Gap befinden sich neun Spacer an den Positionen der Stahlstangen. Aus der Abbildung 3.5 ist die Lage der Spacer ersichtlich, außerdem ist sie in Tabelle 7.1 angegeben.

Die Spacer haben eine Dicke von 2.35 mm. Da die Platten direkt an den Spacern anliegen,



Gewichteter Mittelwert mit  $p=1$



Gewichteter Mittelwert mit  $p=4$

Abbildung 7.4: Mit den gewichteten Mittelwert rekonstruierte Flächen. Bei der oberen Fläche ist  $1/r$  als Gewicht verwendet worden, bei der unteren  $1/r^4$ .

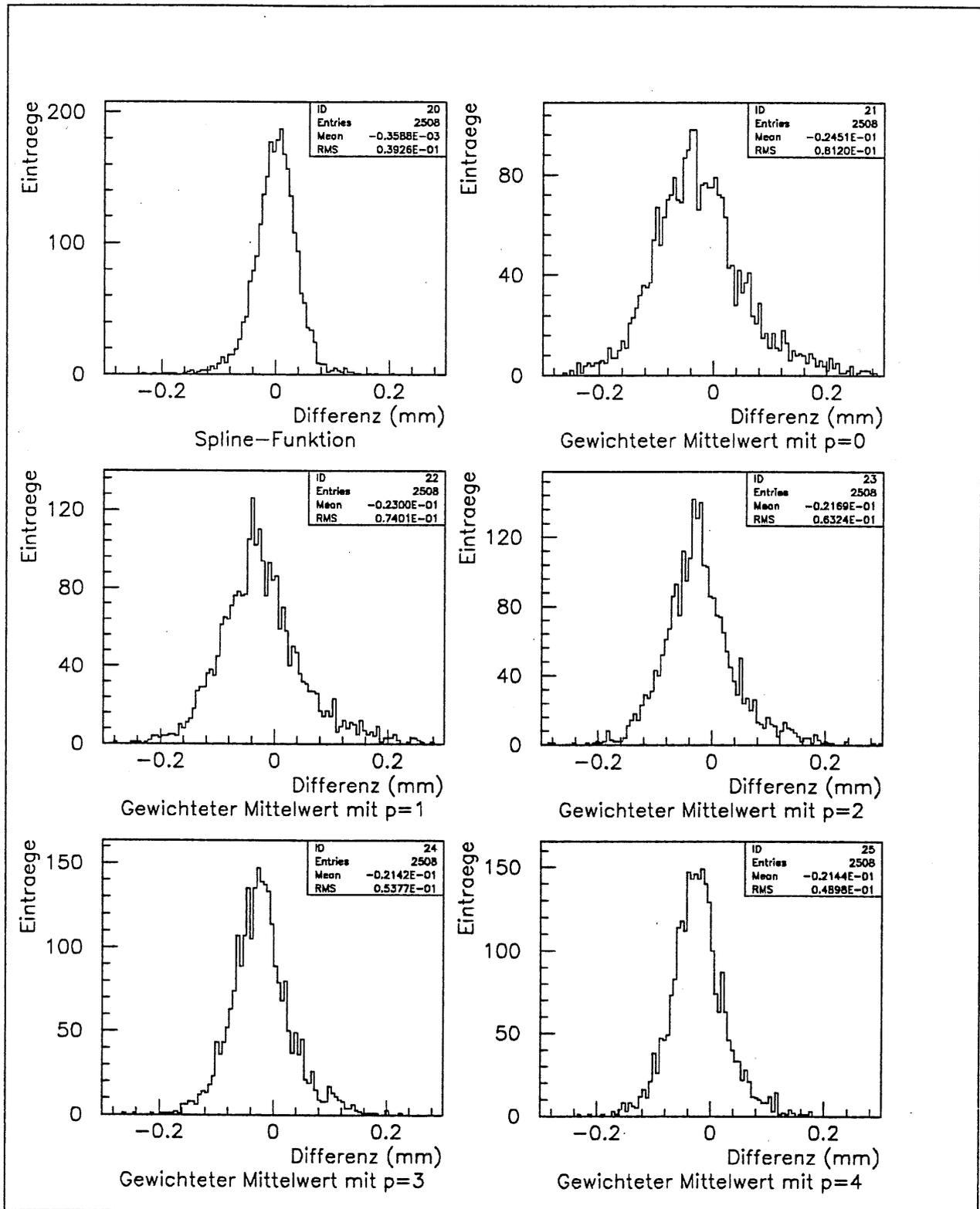


Abbildung 7.5: Verteilungen der Differenz von der gemessenen Gapbreite der mittleren Linien der Kontrollmessungen zu den mit den gewichteten Mittelwert für verschiedene Potenzen  $p$  rekonstruierten Gapbreiten.

sollte die Gapbreite an den Spacerpositionen 2.35 mm betragen. Abbildung 7.6 stellt die Verteilung der Gapbreiten an den Spacerpositionen für Stack 6 von FB2E dar. Der Mittelwert der Verteilung von 2.349 mm stimmt sehr gut mit der Spacerdicke überein.

Die Spacer fixieren an den Stangen eine feste Gapbreite. Die Variationen der Gapbreite sollten daher an den Spacerpositionen kleiner als sein als auf der restlichen Fläche. Entlang der in Abbildung 7.7 gezeigten Geraden in X- oder Y-Richtung, wird in Zentimeterabständen der Mittelwert der Gapbreite  $\bar{d}$  über alle  $n$  Gaps eines Stacks bestimmt.

Das mittlere Fehlerquadrat  $s^2$  des Mittelwertes  $\bar{d}$  wird mit der Formel

$$s^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2$$

berechnet, wobei  $d_i$  die Gapbreite im  $i$ -ten Gap ist.

In Abbildung 7.8 ist das mittlere Fehlerquadrat des Mittelwertes der Gapbreite entlang der Geraden aufgetragen. Die Positionen der Spacer sind durch senkrechte Striche markiert. Im Bereich jeder Spacerposition befindet sich ein Minimum des mittleren Fehlerquadrates, und zwar nur dort. Die Spacer geben also eine feste Gapbreite vor, welches in der Variation der Gapbreite deutlich sichtbar ist.

## 7.5 Verteilungen der Plattendicken

Die typische Verteilung der Dicke einer Kalorimeterplatte in Y-Richtung ist annähernd gaußförmig. In X-Richtung ist Platte bis auf eine kleine Erhöhung in der Mitte im Wesentlichen flach. Die in Abbildung 7.9 dargestellten Steigungen von Platten in X- und Y-Richtung bestätigen dieses. Die Variationen der Plattendicke sind in Y-Richtung viel stärker als in X-Richtung.

Die Abbildungen 7.10 und 7.11 zeigen die Verteilung der jeweils über eine Platte gemittelten Plattendicke der Ausleseplatten und Hochspannungsplatten für die in den H1-Detektor eingebauten Stacks des FB2E- und BBE-Kalorimeters. Zur Bestimmung des Mittelwertes ist die Plattendicke an in Zentimeterabständen in X- und Y-Richtung über die gesamte Plattenfläche gleichmässig verteilten Punkten rekonstruiert worden. Man erkennt deutlich an den beiden Peaks die Dickendifferenz der beiden Plattenarten, die durch die Kapton- und HRC-Schichten der Hochspannungsplatten verursacht wird. Die Unterschiede von Stack zu Stack sind sehr gering, wodurch der Erfolg des Mischens der Platten aus der gesamten Produktion bestätigt wird.

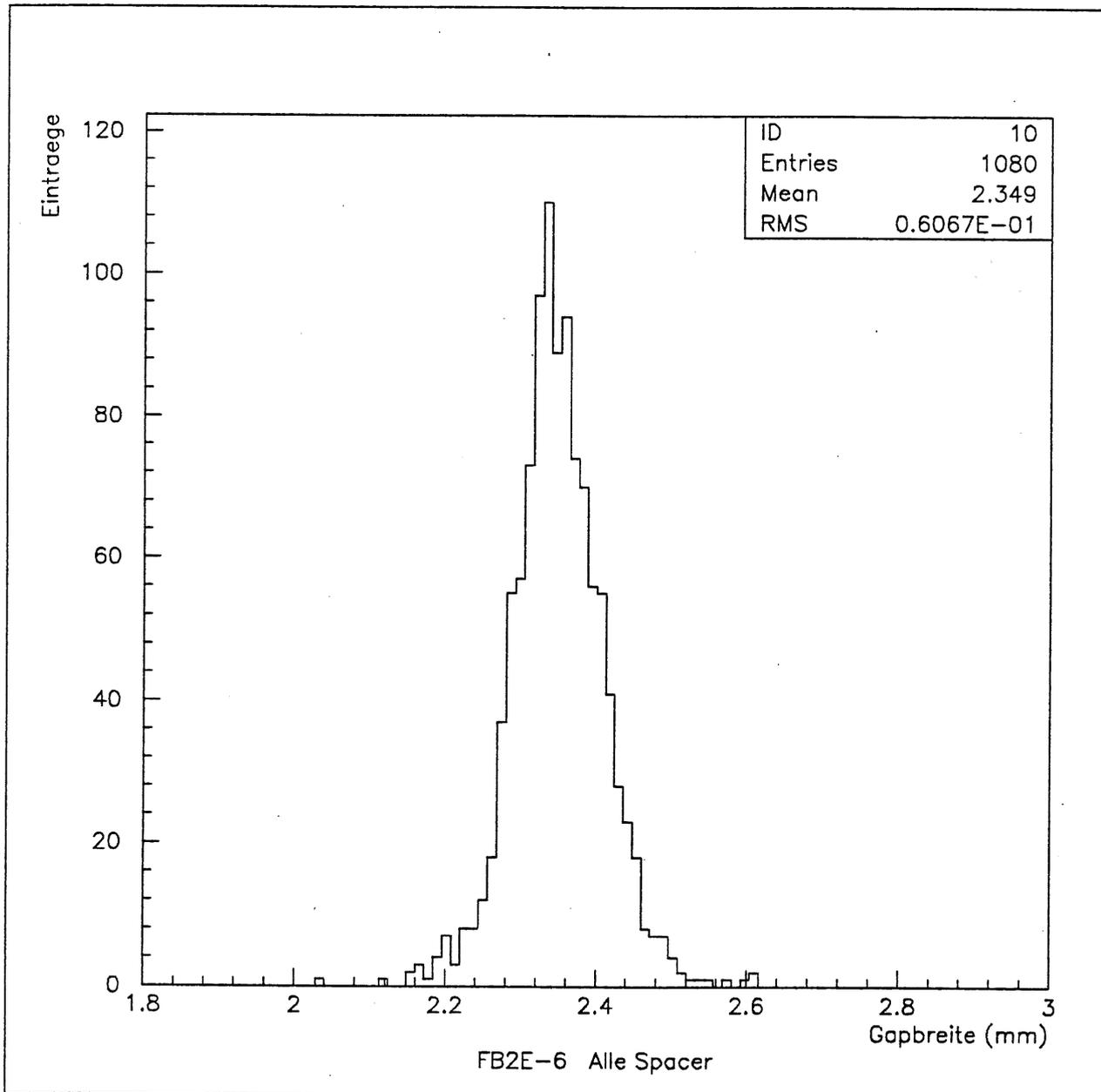


Abbildung 7.6: Verteilung der Gapbreite an den Spacerpositionen für Stack FB2E 6. Dazu ist mit den Spline-Funktionen an den in Tabelle 7.1 angegebenen Positionen die Gapbreite für jedes Gap des Stacks bestimmt worden. Der Mittelwert von 2.349 mm stimmt sehr gut mit der vorgebenen Spacerdicke von 2.35 mm überein.

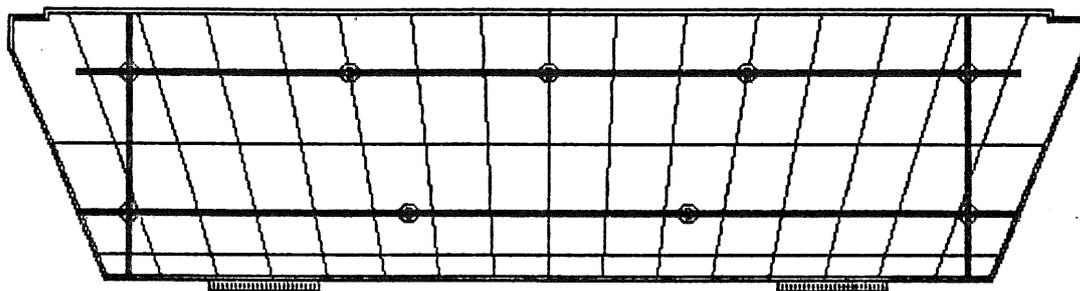


Abbildung 7.7: Lage der Geraden zur Bestimmung der Variation der Gapbreite

## 7.6 Verteilungen der Gapbreiten

Die Variationen der Gapbreite haben auf das Kalorimetersignal einen größeren Einfluß als diejenigen der Plattendicken. Die Strahlungslänge einer Kalorimeterplatte ändert sich bei einer Dickenvariation von  $500\mu\text{m}$  nur um etwa 2%, weil der größte Teil der Energie im Blei und nicht im G10 deponiert wird. Die gesammelte Ladung dagegen ist direkt proportional zur Gapbreite. Bei einer Variation von  $500\mu\text{m}$  ändert sich das Signal um mehr als 20 %.

Da die Form der Gaps durch die Form der Platten vorgegeben ist, ähnelt das Verhältnis der Steigungen der Gapbreite in X- und Y-Richtung, in Abbildung 7.12 dargestellt, denen in Abbildung 7.9 gezeigten Steigungen der Plattendicke. Auch bei den Gapbreiten dominieren die Variationen in Y-Richtung.

Die Abbildungen 7.13 und 7.14 zeigen die Verteilungen der Gapmittelwerte der in den H1-Detektor eingebauten Stacks der Kalorimeter FB2E und BBE. Die Unterschiede in der mittleren Gapbreite pro Stack liegen aufgrund des Mischens der Platten nur in der Größenordnung von 1%. Bei den FB2E-Stacks 1 und 5 konnten Gaps aufgrund ungenügender Meßdaten nicht rekonstruiert werden.

Betrachtet man allerdings die Verteilung der mittleren Gapbreiten der Pads für die einzelnen  $\Theta$ -Lagen, so ergeben sich schon deutliche Differenzen. In der Abbildung 7.15 sind die Verteilungen dargestellt. Die mittleren Gapbreiten pro  $\Theta$ -Lage spiegeln die typische Form der Gaps wieder. Allerdings sind die Streuungen innerhalb einer  $\Theta$ -Lage sehr groß, so daß innerhalb einer Standardabweichung die Gapbreiten gleich sind.

Dieses ändert sich drastisch, wenn stattdessen die mittlere Gapbreite der Auslesekanäle, wiederum getrennt nach den einzelnen  $\Theta$ -Lagen, betrachtet. Die Standardabweichung verringern sich um einen Faktor 4, während die Unterschiede in den Mittelwerten bleiben.

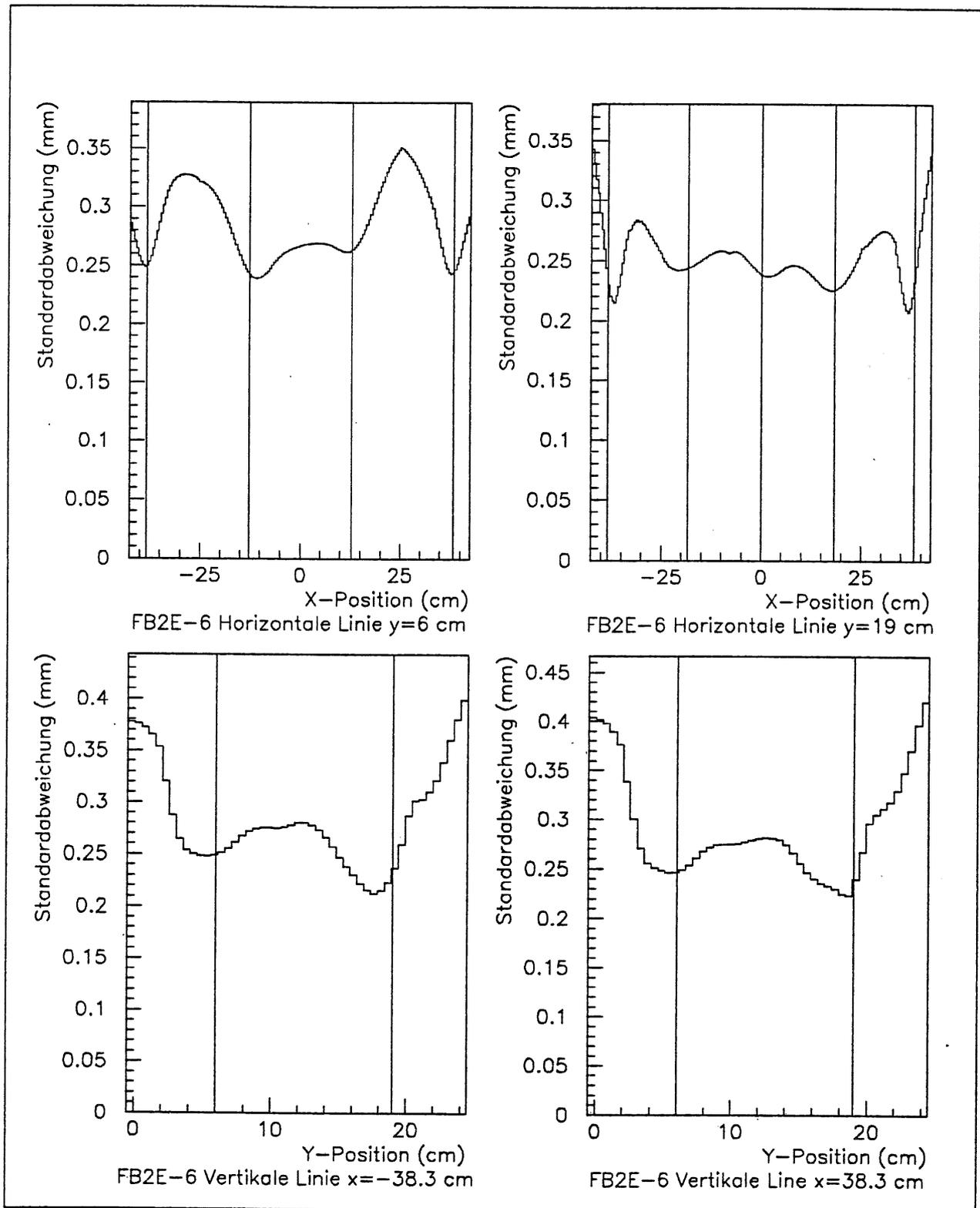


Abbildung 7.8: Die mittleren Fehlerquadrate der über ein Stack gemittelten Gapbreite. Entlang von Geraden in X- und Y-Richtung ist in 1 cm Abständen das mittlere Fehlerquadrat der Gapbreite bestimmt worden. Die senkrechten Linien zeigen die Positionen der Spacher auf den Linien an.

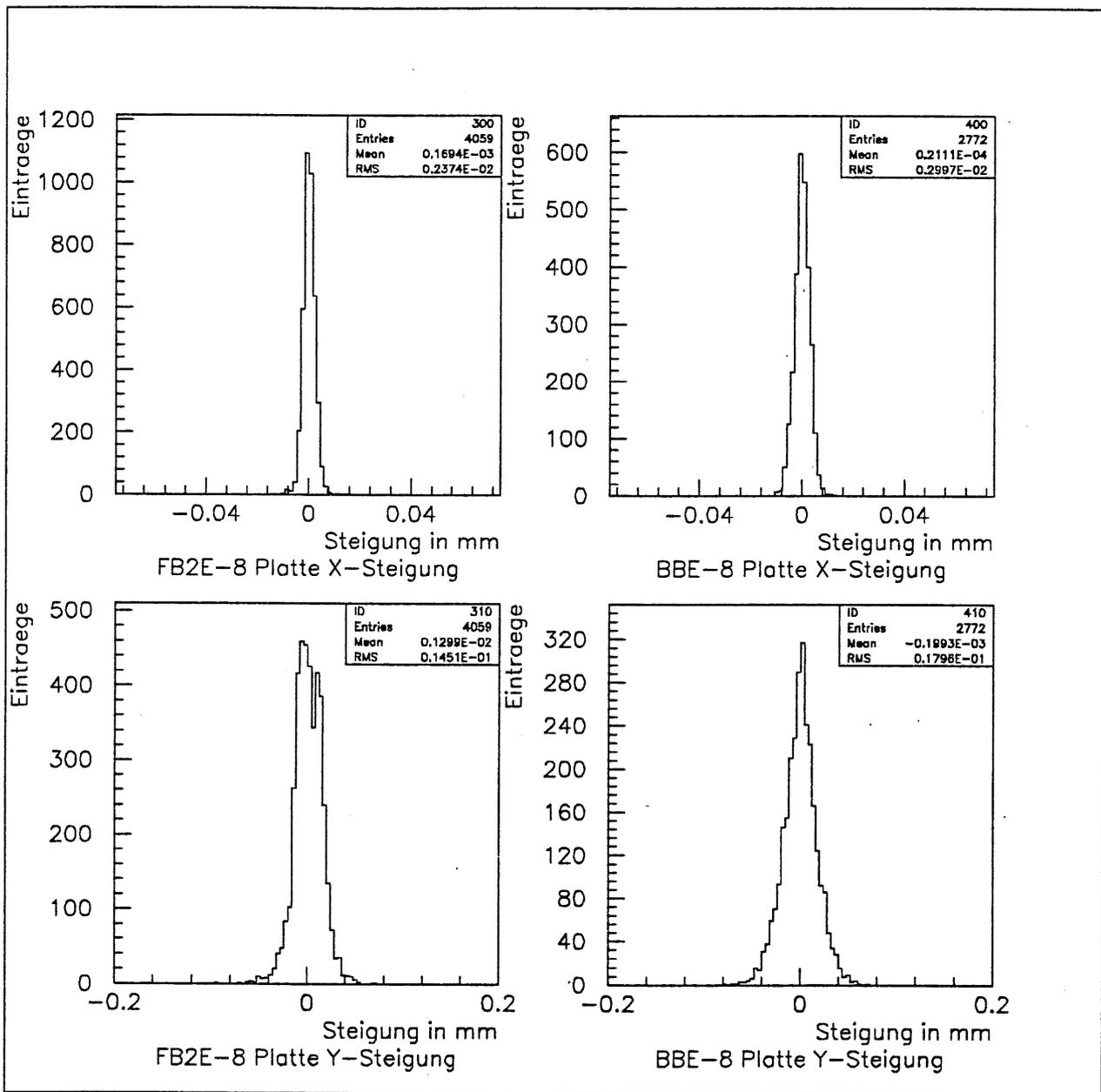


Abbildung 7.9: Verteilungen von Steigungen in X- und Y-Richtung der Plattendicke für die Stacks FB2E 8 und BBE 8. Die Steigung ist jeweils im Mittelpunkt jeder Teilfläche der Spline-Funktion aus dem Spline-Polynom bestimmt worden. Die Teilflächen an den Rändern sind nicht berücksichtigt, da diese nur extrapoliert worden sind.

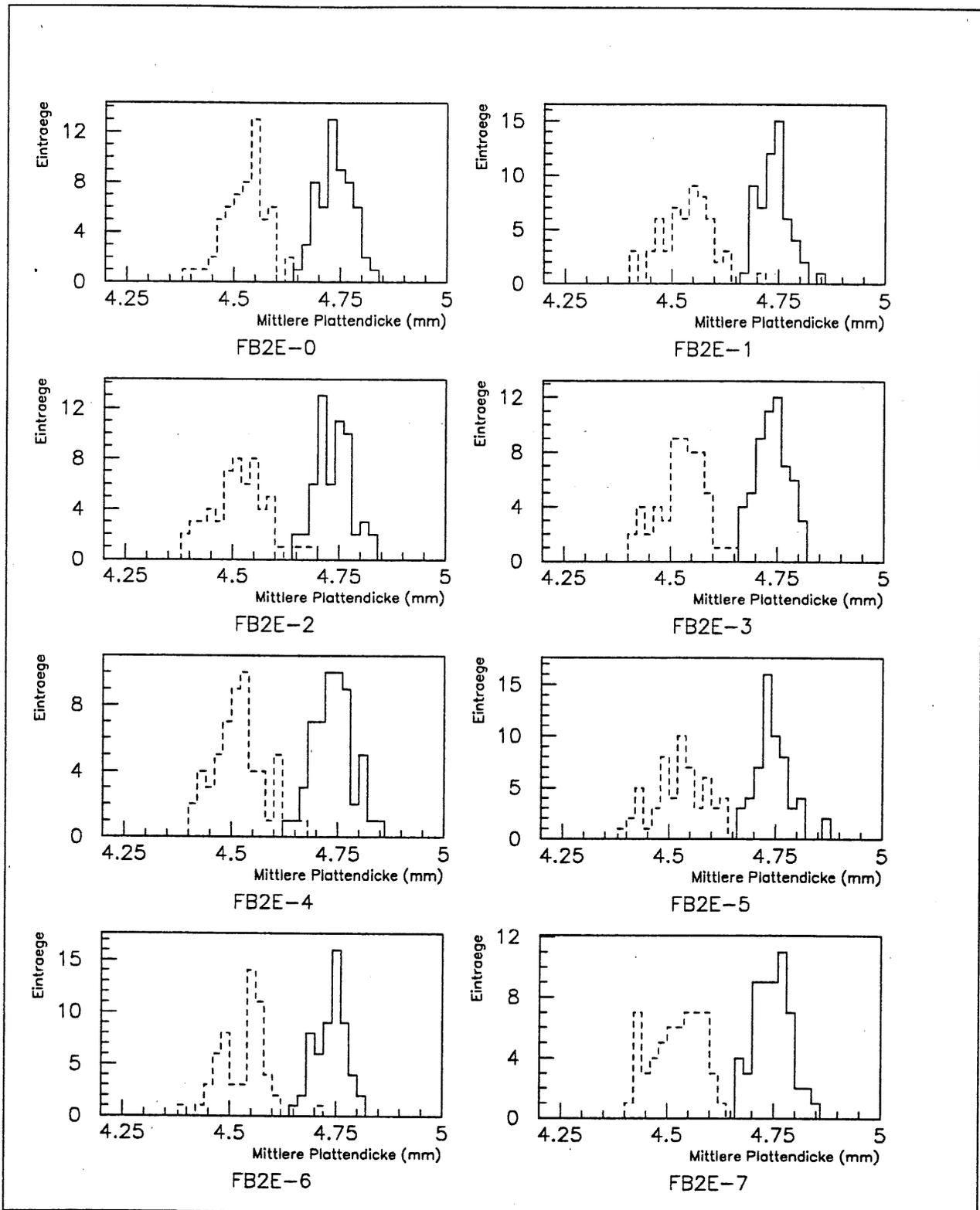


Abbildung 7.10: Die Verteilung der jeweils über eine Kalorimeterplatte gemittelten Plattendicke der Hochspannungs- und der Ausleseplatten für die in den H1-Detektor eingebauten FB2E-Stacks. Auf der X-Achse ist jeweils die Plattendicke in mm aufgetragen, auf der Y-Achse die Anzahl der Einträge. Die gestrichelten Einträge stammen von Ausleseplatten, die durchgezogenen von Hochspannungsplatten.

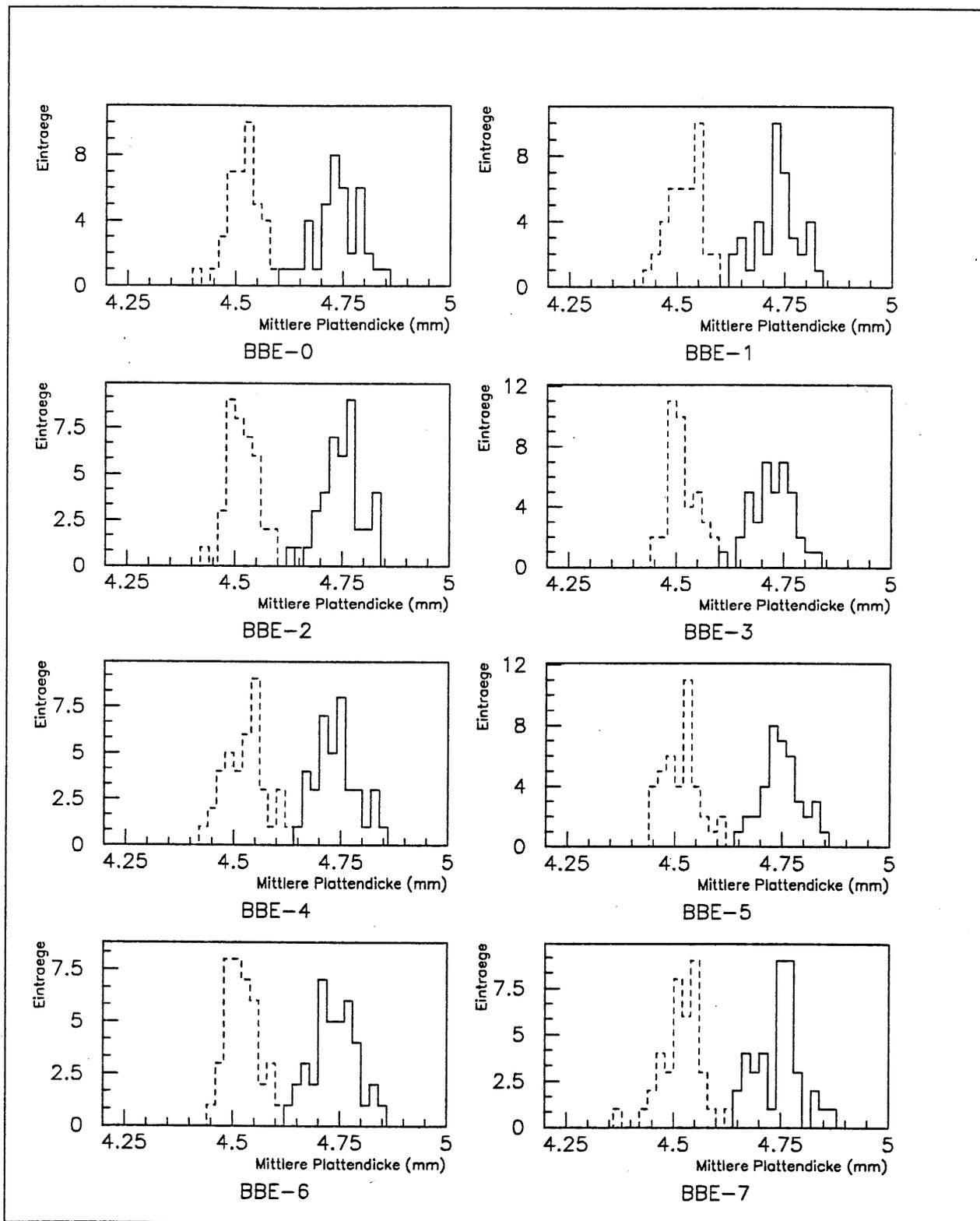


Abbildung 7.11: Die Verteilung der jeweils über eine Kalorimeterplatte gemittelten Plattendicke der Hochspannungs- und der Ausleseplatten für die in den H1-Detektor eingebauten BBE-Stacks. Auf der X-Achse ist jeweils die Plattendicke in mm aufgetragen, auf der Y-Achse die Anzahl der Einträge. Die gestrichelten Einträge stammen von Ausleseplatten, die durchgezogenen von Hochspannungsplatten.

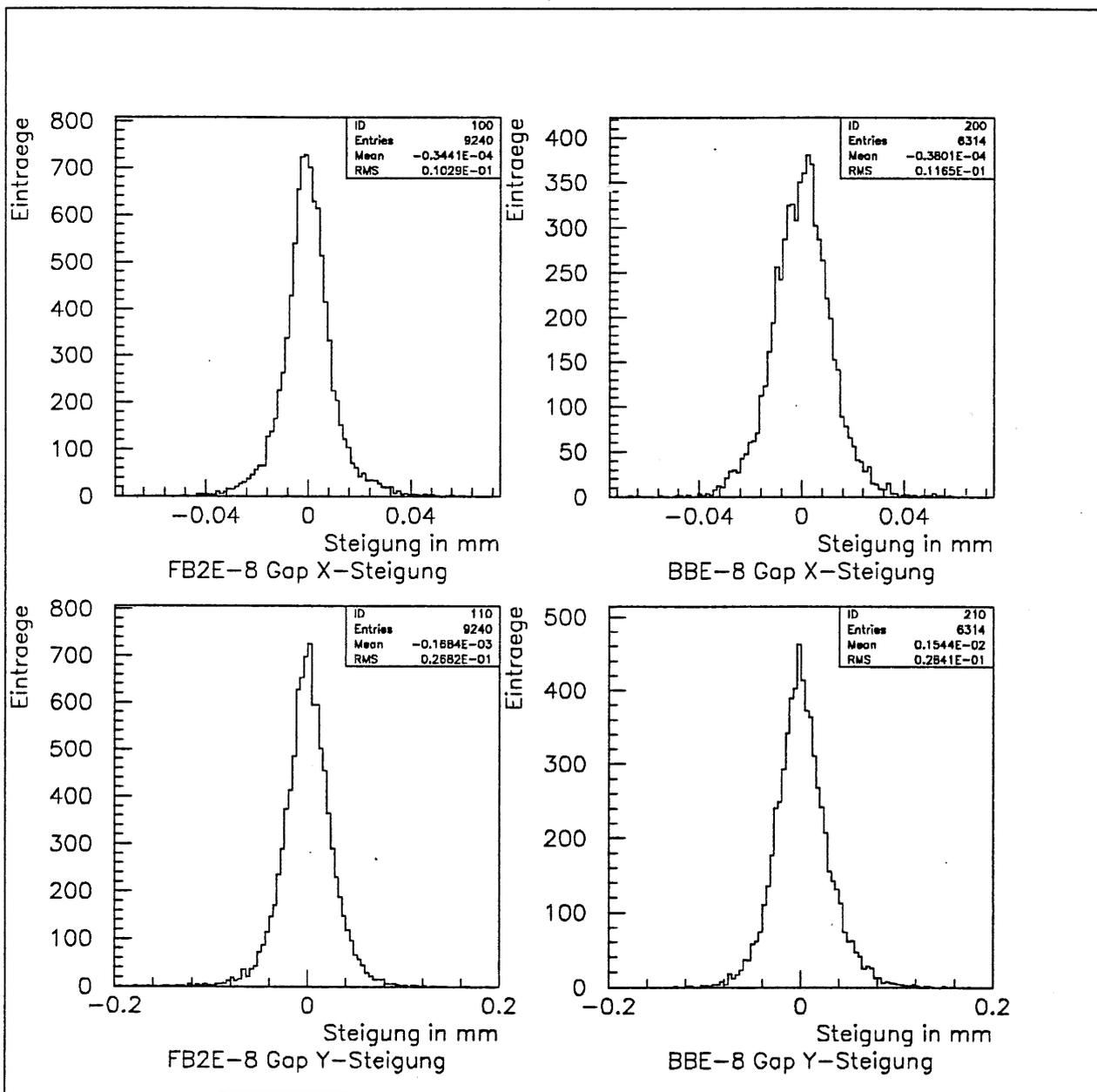


Abbildung 7.12: Verteilungen von Steigungen in X- und Y-Richtung der Gapbreite für die Stacks FB2E 8 und BBE 8. Die Steigung ist jeweils im Mittelpunkt jeder Teilfläche der Spline-Funktion aus dem Spline-Polynom bestimmt worden. Die Teilflächen an den Rändern sind dabei nicht berücksichtigt, da diese nur extrapoliert worden sind.

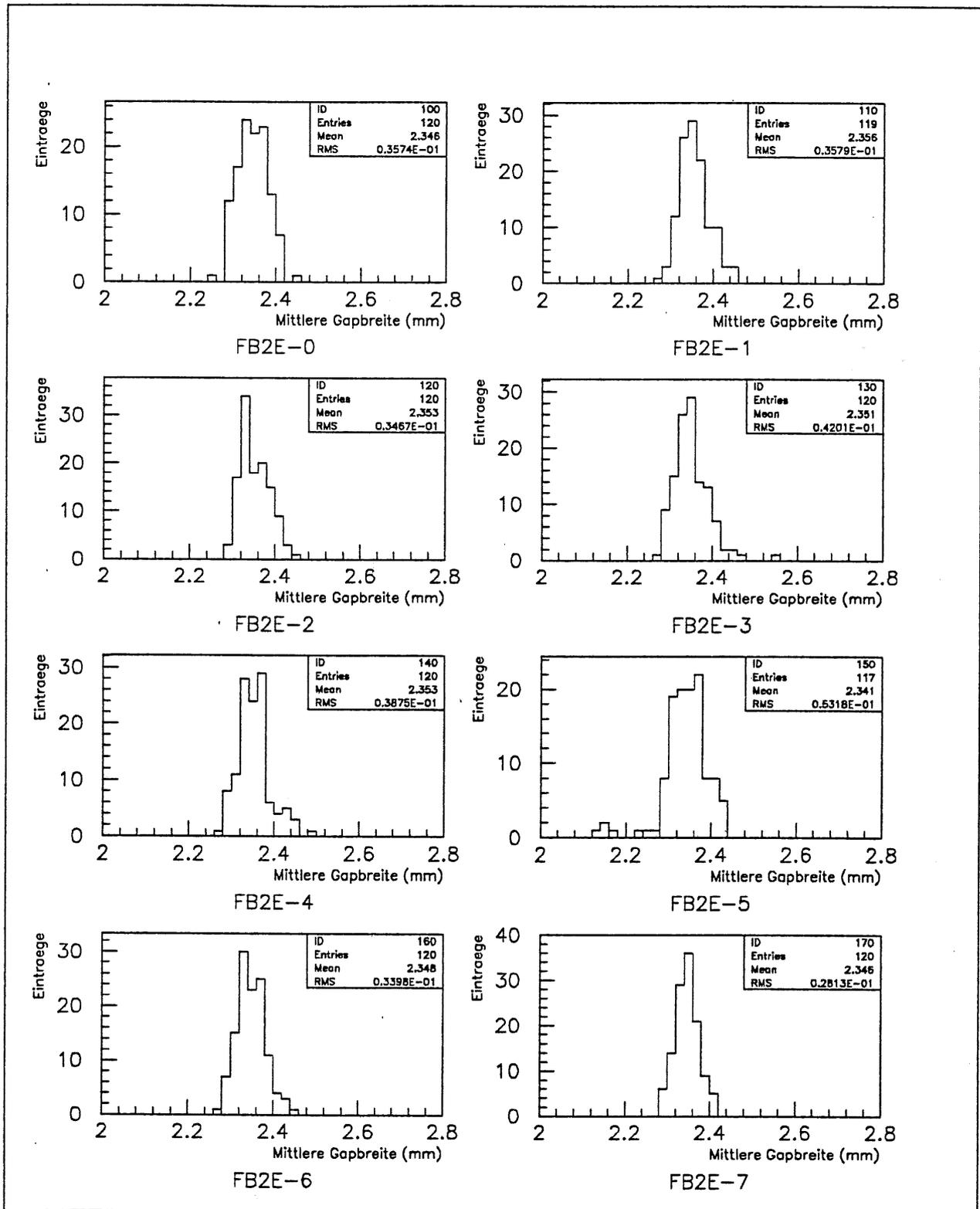


Abbildung 7.13: Die Verteilungen der jeweils über ein Gap gemittelten Gapbreiten für die in den H1-Detektor eingebauten FB2E-Stacks. Auf der X-Achse ist jeweils die Gapbreite in mm aufgetragen, auf der Y-Achse die Anzahl der Einträge.

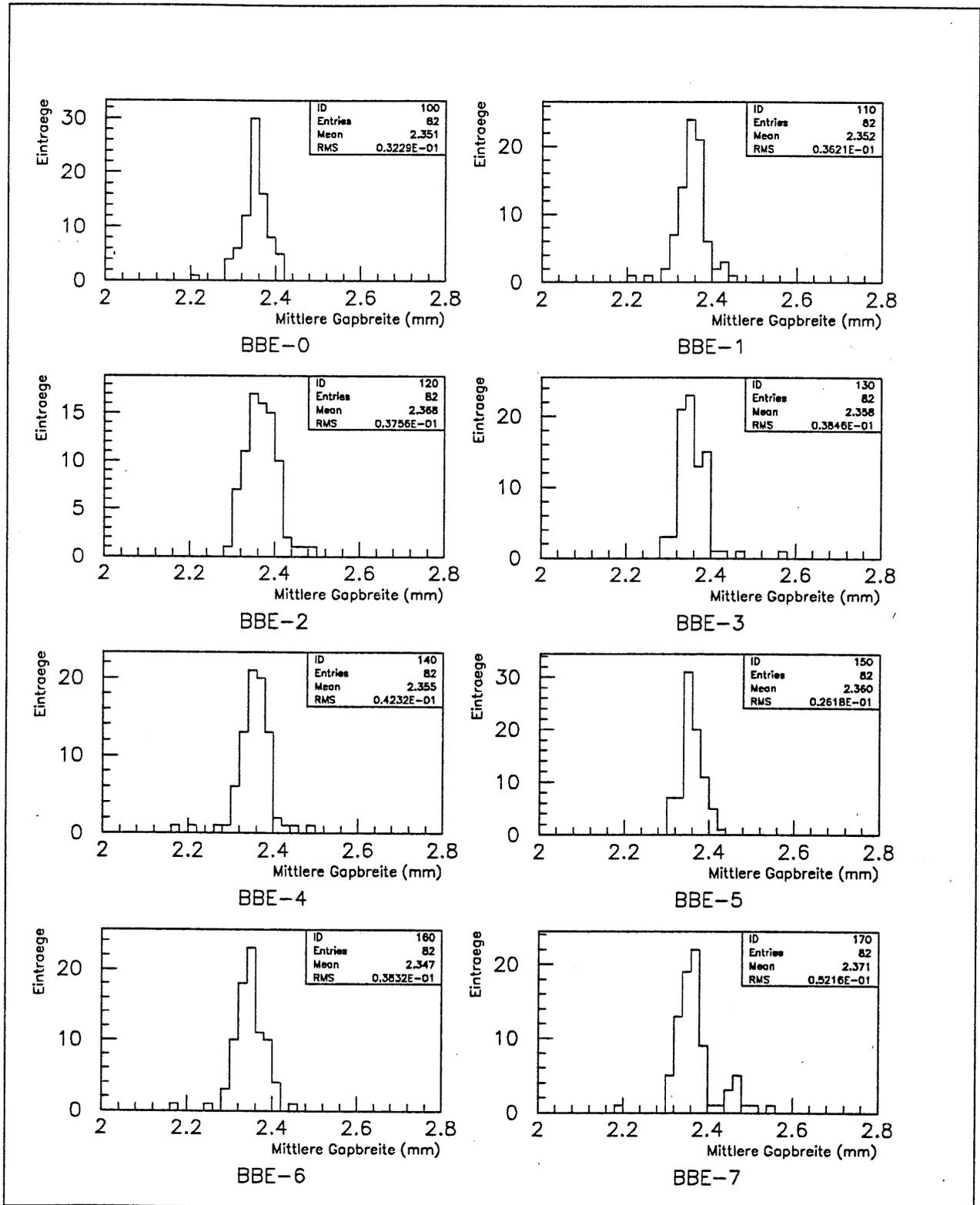


Abbildung 7.14: Die Verteilungen der jeweils über ein Gap gemittelten Gapbreiten für die in den H1-Detektor eingebauten BBE-Stacks. Auf der X-Achse ist jeweils die Gapbreite in mm aufgetragen, auf der Y-Achse die Anzahl der Einträge.

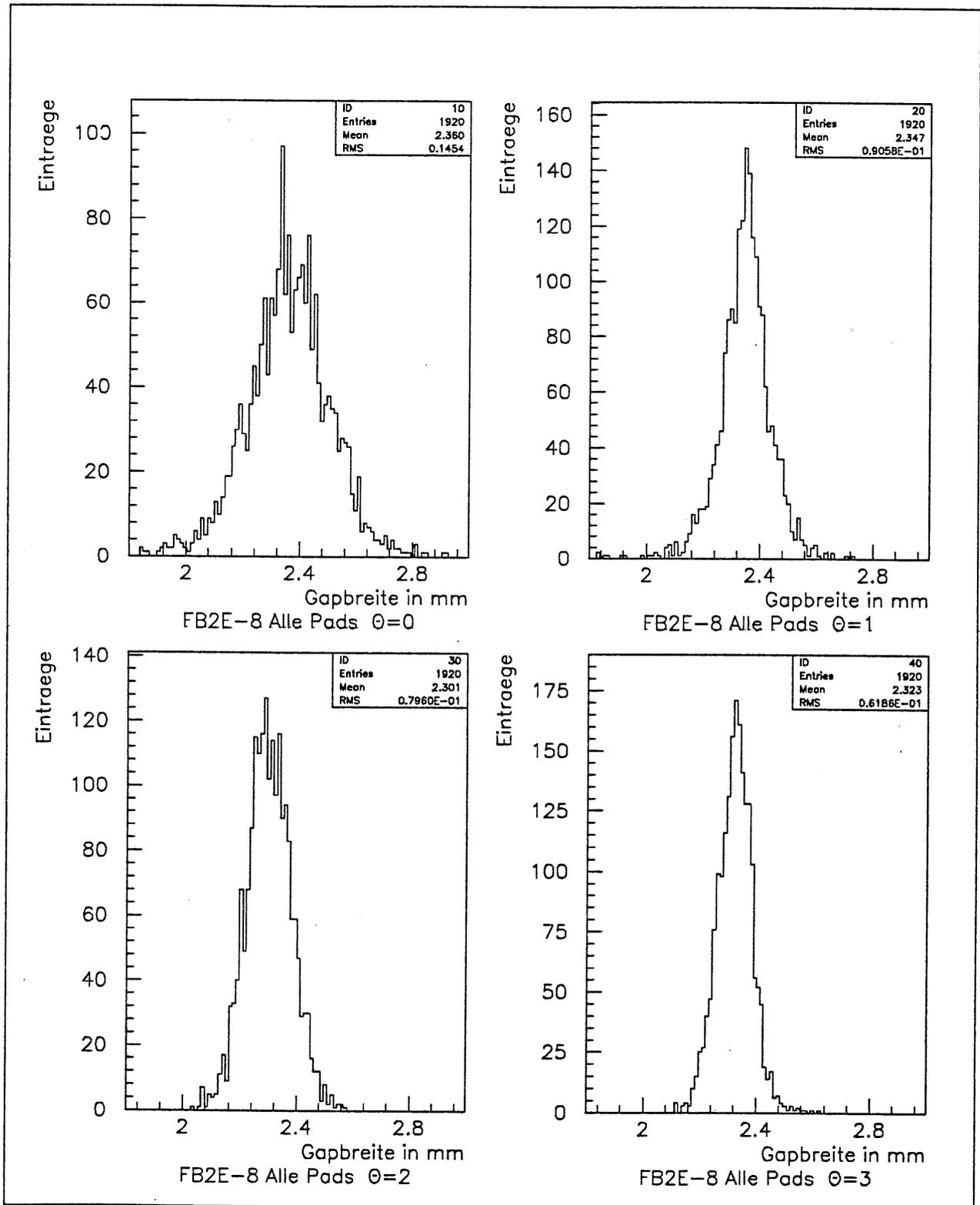


Abbildung 7.15: Verteilung der jeweils über ein Pad gemittelten Gapbreite für die einzelnen  $\Theta$ -Lagen des FB2E-Stacks 8.

Den sehr geringen Variationen der mittleren Gapbreite innerhalb einer  $\Theta$ -Lage entsprechen sehr geringe Variationen im Signal des Kalorimeters bei Änderungen des Einfallortes der zu messenden Teilchen. Die Auswirkungen der Variationen auf die Homogenität des Kalorimeters sind kleiner als 1%, was durch erste Monte-Carlo-Simulationen [GUZI91] bestätigt wird (siehe Abschnitt 7.8).

Bei Verschiebungen des Schauerschwerpunktes zwischen den einzelnen  $\Theta$ -Lagen dürften dagegen die Einflüsse der Variationen größer sein. Untersuchungen auf der Basis von Monte-Carlo-Simulationen sind zum Zeitpunkt der Diplomarbeit noch nicht abgeschlossen.

Ein Hauptziel dieser Diplomarbeit ist die Bestimmung von Korrekturfaktoren für die einzelnen Auslesekanäle. Da der Einfluß der Variationen der Plattendicke auf das Signal nur sehr schwach ist, kann bei der Bestimmung der Korrekturfaktoren die Variation der Plattendicken vernachlässigt werden. Der Korrekturfaktor für einen einzelnen Auslesekanal ist dann gleich der mittleren Gapbreite des Auslesekanals geteilt durch die Normgapbreite, die auf 2.35 mm festgesetzt worden ist. In Abbildung 7.17 ist die Verteilung der Korrekturfaktoren für den FB2E-Stack 8 dargestellt. Die mittlere Korrektur liegt bei 0.7 % mit einer Standardabweichung von 1.2 %.

## 7.7 Betrachtung von kompletten Plattenstapeln

Bis jetzt sind die Plattendicken und Gapbreiten nur unabhängig voneinander betrachtet worden. Da die Platten durch die Spacer an den Stangen einen bestimmten Abstand haben, sollte die Form des Gaps im Wesentlichen von der Form der Platten vorgegeben sein. Um dieses zu überprüfen, ist für den FB2E Stacks 8 entlang von zwei Geraden, eine liegt auf der Y-Achse, die andere verläuft in der Plattenmitte parallel zur X-Achse, jeweils in Zentimeterabständen die Plattendicke jeder Platte und die Gapbreite jedes Gaps bestimmt und aufaddiert worden. Die Platten vor der Eisenkonstruktion sind dabei nicht berücksichtigt worden. In Abbildung 7.18 ist die Summe der Gapbreiten, Summe der Plattendicken und die Summe von beiden gezeigt.

In dem Bereich, wo aufgrund der Meßdaten direkt interpoliert werden konnte, ist die Variation der Dicke kleiner als  $\pm 2$  mm. Dies entspricht bei 120 aufaddierten Platten und 118 aufaddierten Gaps einer Variation von weniger als  $10\mu\text{m}$  pro Platte oder Gap. Dabei ist zu beachten, daß die Steigung der Gesamtdicke in dem linken unteren Histogramm von Abbildung 7.18 einen Keilfehler des Plattenstapels anzeigt, der durch Messungen am Stack bestätigt worden ist. Der Keilfehler entsteht, weil die Kalorimeterplatten systematisch an den Spacerpositionen für  $Y = 19$  cm dicker sind als an den Spacerpositionen für  $Y = 6$  cm. Dies wird in dem linken mittleren Histogramm von Abbildung 7.18 deutlich.

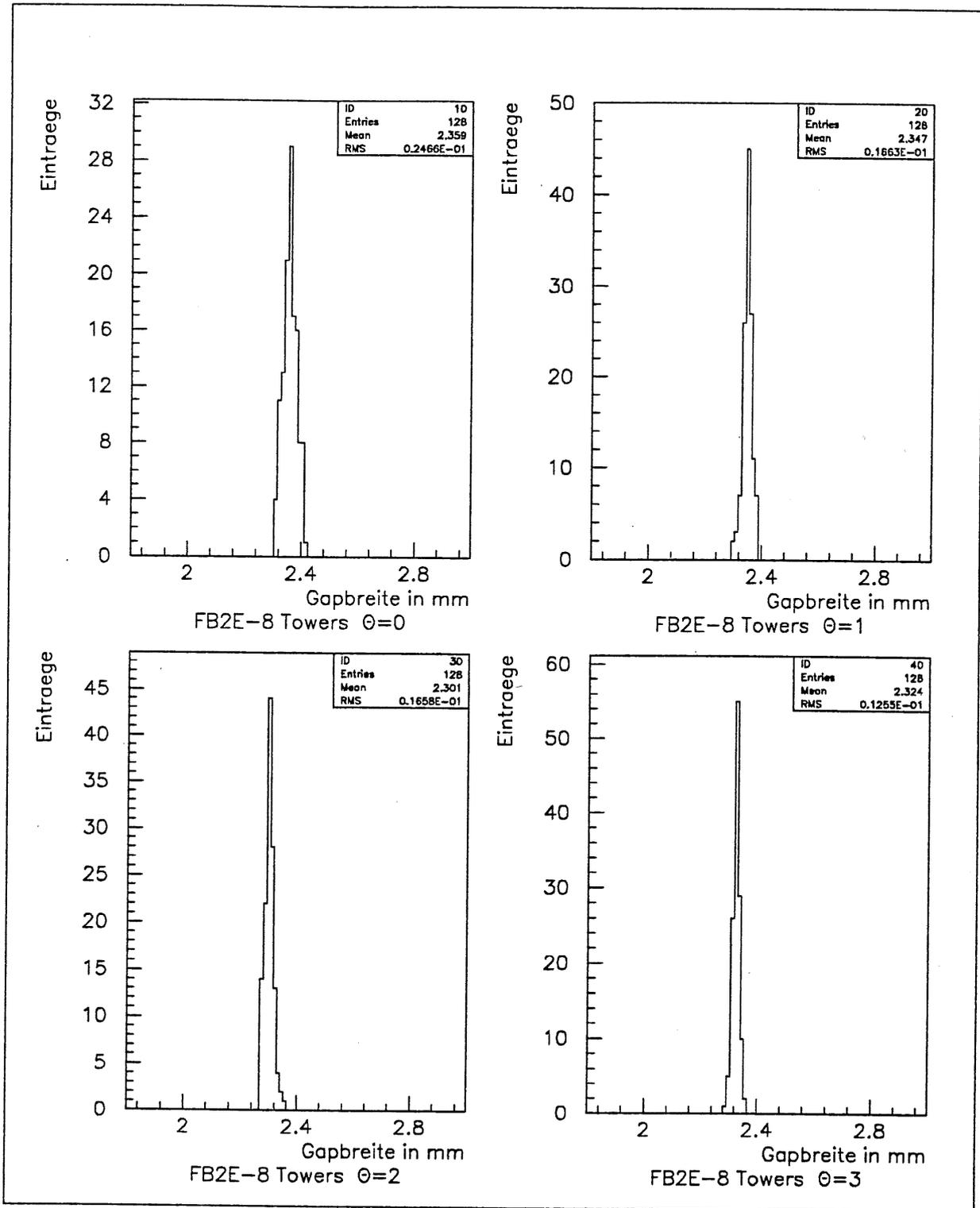


Abbildung 7.16: Verteilung der jeweils über die Auslesekänäle gemittelten Gapbreite für die einzelnen  $\Theta$ -Lagen des FB2E-Stacks 8.

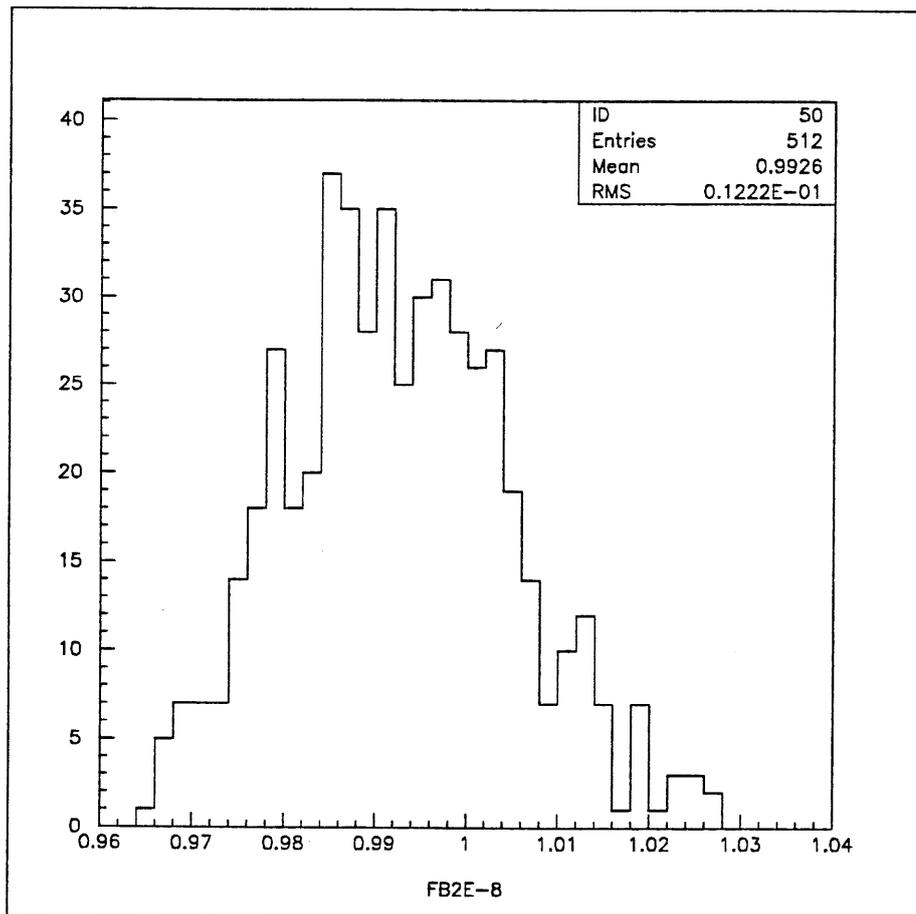


Abbildung 7.17: Verteilung der Korrekturfaktoren des FB2E-Stacks 8.

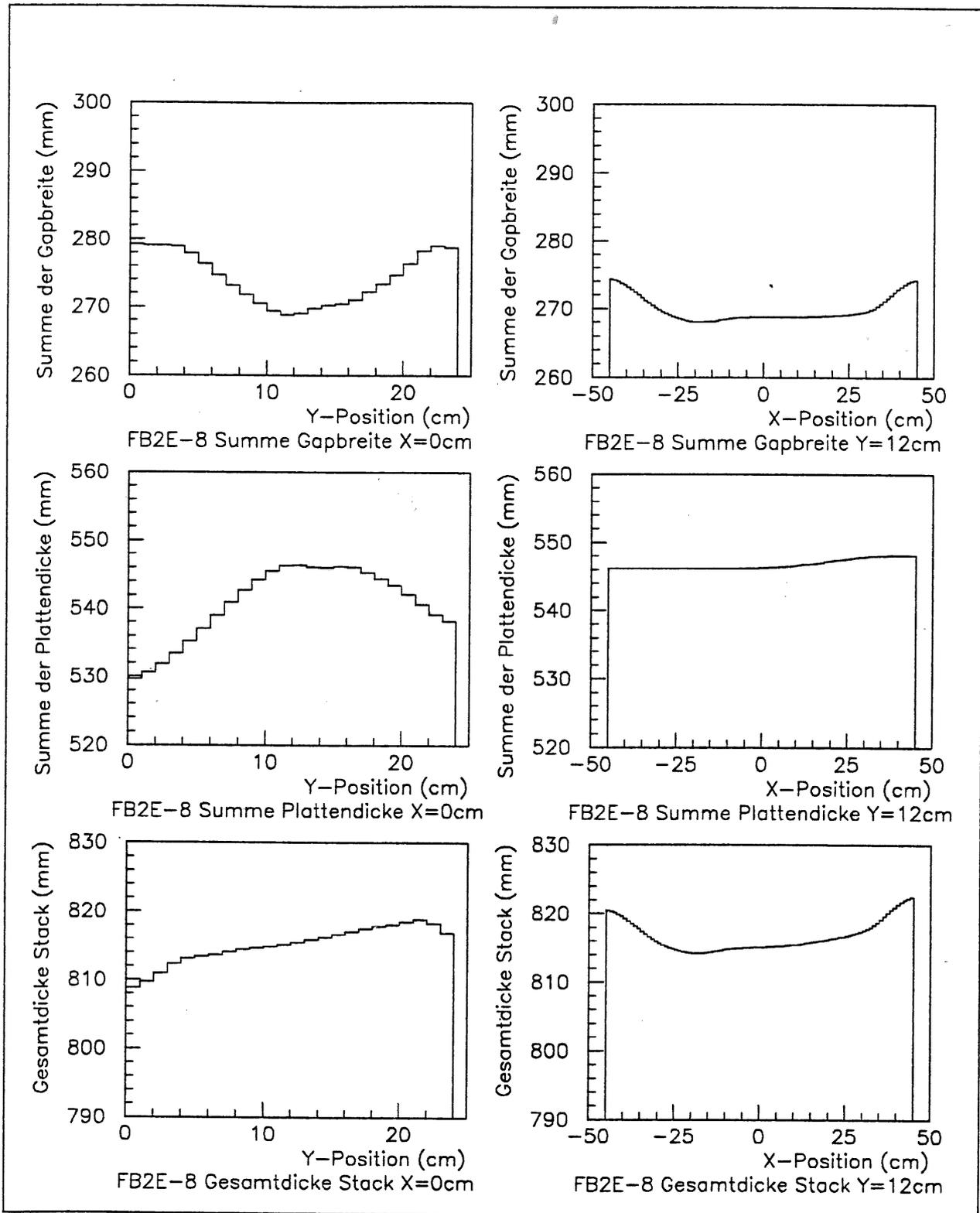


Abbildung 7.18: Verteilung der Gapbreite, der Plattendicke und der Summe von beiden in Richtung der X- und Y-Achse.

Schlechter sieht es an den Rändern in X-Richtung aus. Dort beträgt die Abweichung gegenüber der Mitte bis zu 8 mm, und zwar systematisch zu größeren Dicken hin. Die Ursache dafür liegt in der wirklichen Plattendicke. Die dem Rand nächsten Meßlinien für die Plattendicke liegen bei  $\pm 33$  cm, also mehr als 10 cm von den Rändern der Platte entfernt. Wie man aber an der typischen Plattenform in Y-Richtung sieht, ist die Platte an den Rändern dünner als in der Mitte. Dieses gilt natürlich auch für die Ränder der Platte in X-Richtung. Dem Extrapolationsalgorithmus sind bei der Extrapolation in X-Richtung nur die Daten in der Mitte der Platte bekannt, weshalb die extrapolierten Dicken an den kurzen Plattenrändern zu groß sind. Bei der Gapmessung liegen die äußersten Meßlinien bei  $\pm 42.5$  cm, die Gapbreite wird also an den Rändern, wo die Platten in Wirklichkeit dünner sind als die rekonstruierten Platten, gemessen. Auf diese Weise kommt es zu den Abweichungen an den kurzen Rändern. Die Abweichung von 8 mm entspricht bei 120 Platten einem systematischen Fehler von etwa  $60\mu\text{m}$  pro Platte in der Dicke an den kurzen Plattenrändern.

## 7.8 Ergebnisse von EGS-Simulationen

Detaillierte Analysen der Auswirkungen der Variationen in der Gapbreite und den Plattendicken auf die Schauerentwicklung sind nur durch Monte-Carlo Simulationsrechnungen möglich. Diese Analysen werden von [GUZI91] zur Zeit mit dem Programmpaket EGS4 durchgeführt.

Die ersten Ergebnisse ermöglichen eine Abschätzung, welche Auswirkungen durch die Variationen maximal zu erwarten sind. Wie in den vorherigen Abschnitten gezeigt wurde, sind die Variationen in Y-Richtungen am größten. Bei den Monte-Carlo Rechnungen treten 30 GeV Elektronen senkrecht zu den Platten in ein FB2E-Stack ein. Um die Variationen zu analysieren, ist der Eintrittspunkt in Y-Richtung verschoben worden, während die X-Position beibehalten worden ist. Die Rechnungen sind einmal mit einem „idealen“ Stack durchgeführt worden, bei dem alle Platten und Gaps eben sind und die Normdicken besitzen, und einem Stack, bei dem die Plattendicken und Gapbreiten aus den Meßdaten des FB2E-Stacks 8 rekonstruiert worden sind. Bestimmt wurde der Anteil der im Argon nachgewiesenen Energie zu der Gesamtenergie des einfallenden Elektrons.

An den Rändern der Platten des rekonstruierten Stacks sind die Gaps in der Regel breiter als in der Mitte und dementsprechend verhält sich auch der Anteil der sichtbaren Energie. Das Minimum des Anteils der sichtbaren Energie erhält man also bei einem Eintrittspunkt der Elektronen in Höhe der Plattenmitte. Dies ist in der unteren Abbildung von 7.19 deutlich zu erkennen. Die Variationen liegen in einem Intervall von 3.2%.

Bei dem idealen Stack dagegen verschlechtern nur Leckverluste den Anteil der sichtbaren Energie. Die Variation ist genau umgekehrt zu derjenigen des rekonstruierten Stacks,

das Maximum des Anteils der sichtbaren Energie liegt bei einem Eintrittspunkt in der Plattenmitte. Dies wird in der oberen Abbildung von 7.19 gezeigt.

Insgesamt beträgt die Abweichung des Anteils der sichtbaren Energie des rekonstruierten Stacks gegenüber dem idealen Stack bis zu 4.7%.

Betrachtet man das Ganze mit den tatsächlichen Eintrittswinkeln von  $19^\circ$  bis  $26^\circ$ , gehen die Variationen auf unter 1 % zurück, da der Schauer aufgrund des Winkels durch verschiedene  $\Theta$ -Lagen geht und sich dadurch die Variationen in Y-Richtung herausmitteln [GUZI91]. In Abbildung 7.20 ist der Anteil der sichtbaren Energie in Abhängigkeit des Einschussortes in Strahlrichtung bei einem Einschusswinkel von  $25^\circ$  aufgetragen. Die gestrichelten Linien liegen jeweils 1% von der mittleren sichtbaren Energie entfernt. Die Variation der sichtbaren Energie ist sowohl bei dem idealen Stack als auch bei dem rekonstruierten Stack viel geringer als 1%. Dies bestätigt die geringen Variationen in der mittleren Gapbreite der Auslesekanäle innerhalb der  $\Theta$ -Lagen.

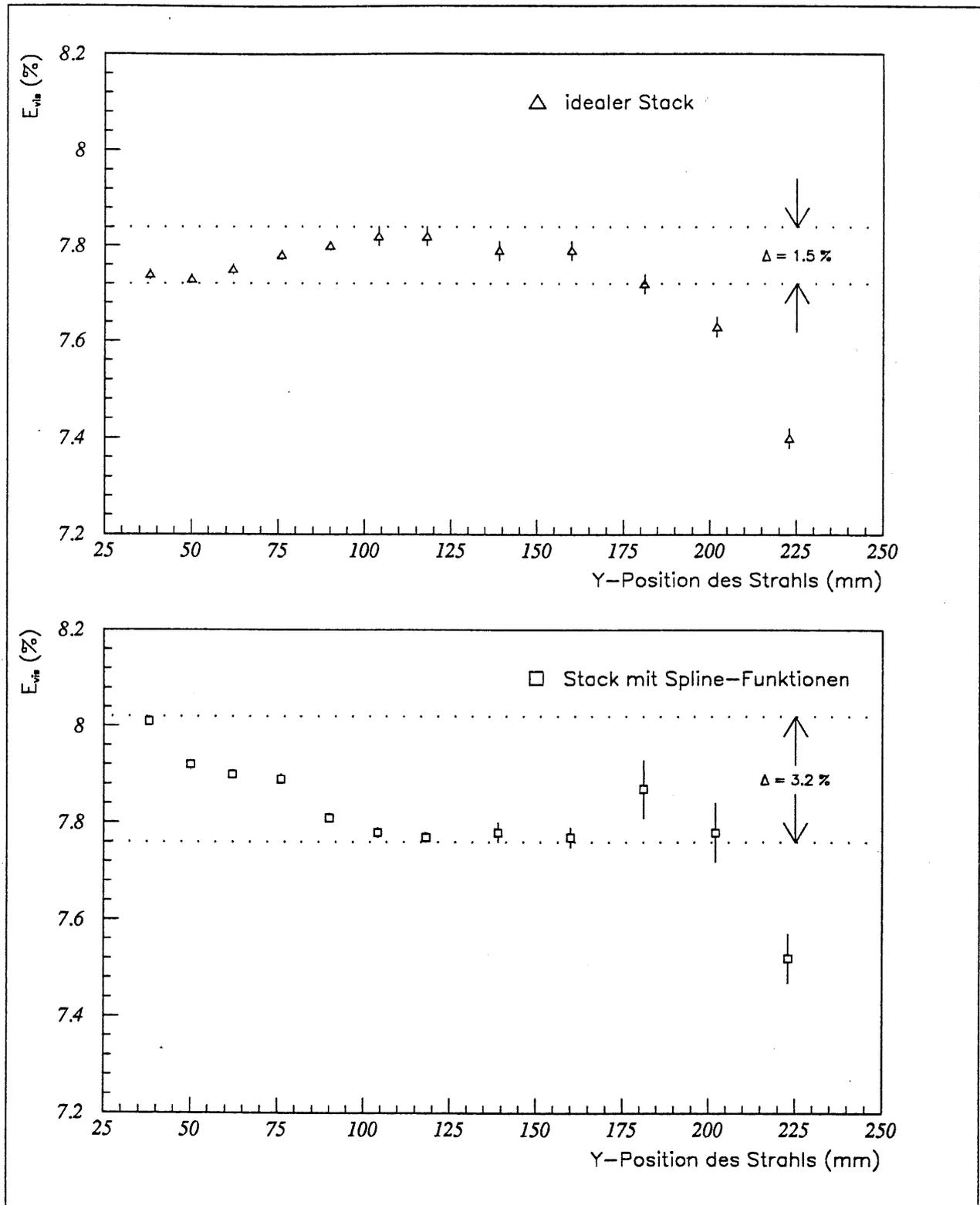


Abbildung 7.19: Das Verhältnis der sichtbaren Energie an der Gesamtenergie eines rekonstruierten und eines idealen Stacks in Abhängigkeit von der Einschussposition in Y [GUZI91].

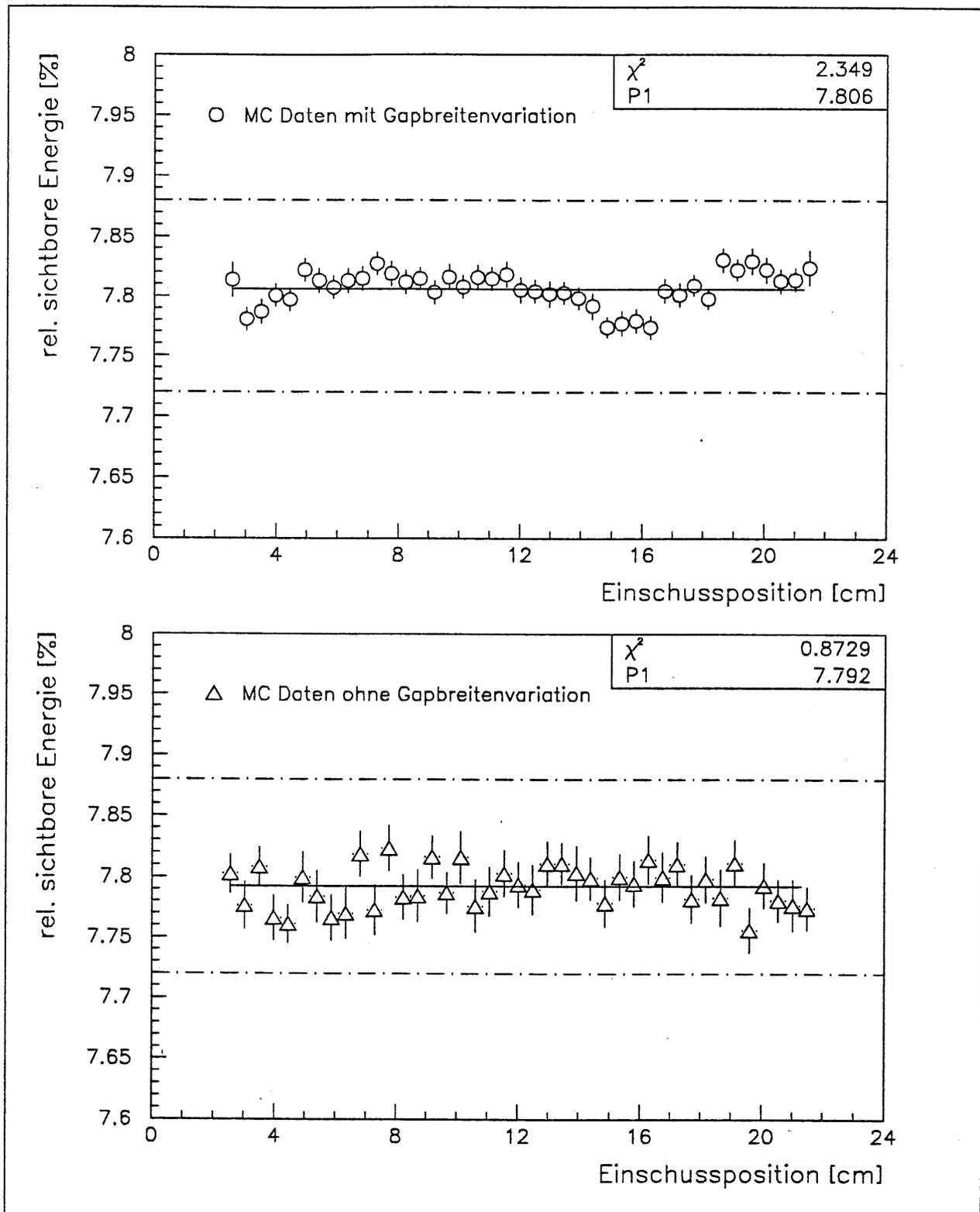


Abbildung 7.20: Das Verhältnis der sichtbaren Energie an der Gesamtenergie eines rekonstruierten und eines idealen Stacks in Abhängigkeit von der Einschussposition in Strahlrichtung. [GUZI91].

# Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden die Auswirkungen der mechanischen Parameter auf das Kalorimetersignal und die Energieauflösung untersucht. Dazu ist eine Methode entwickelt worden, die auf der Grundlage von diskreten Meßdaten eine kontinuierliche Beschreibung der Plattendicken und Gapbreiten über die gesamte Plattenfläche ermöglicht.

Die Kalorimeterplatten der Flüssig-Argon Kalorimeter FB2E und BBE sind aus verschiedenen Komponenten zusammengesetzt. Die physikalischen Größen der einzelnen Komponenten wurden bestimmt und die beiden für die Schauerentwicklung wichtigsten Plattenparameter, die Blei- und G10-Dicke, sind mit der mittleren Plattendicke und Masse aller produzierten Platten angepaßt. Mit diesen Werten konstruierten Normplatten entsprechen in ihrem Aufbau den durchschnittlichen Platten.

Bei diskreten Messungen der Plattendicke und der Gapbreite wurden Variationen über 10 % beziehungsweise 20 % festgestellt. Detaillierte Analysen, vor allem Monte-Carlo-Simulationen, über die Auswirkungen dieser Einflüsse, benötigen eine möglichst genaue, kontinuierliche Beschreibung der Plattendicke und Gapbreite auf der ganzen Plattenfläche. An den sich daraus ergebenden Anforderungen wurden vier verschiedene Methoden getestet, von denen die Methode mit Spline-Funktionen die besten Ergebnisse lieferte. Die Methode ist dann weiterentwickelt worden, um die Anforderungen so gut wie möglich zu erfüllen. Das resultierende Methode benutzt zur Beschreibung zweidimensionale Spline-Funktionen, glättet in Y-Richtung lokale Variationen, arbeitet mit verschiedenen abgestimmten Extrapolationsmethoden und ermöglicht eine schnelle Auswertung. Dabei ist diese Methode so flexibel gehalten, daß sie innerhalb bestimmter Grenzen selbsttätig unvollständige oder fehlerhafte Messungen kompensiert. Weiterhin läßt sich die Methode mit nur minimalen Anpassungen an die unterschiedlichen Positionen der Meßpunkte bei den Messungen der Plattendicken und Gapbreiten adaptieren.

Diese Methode wurde mit zusätzliche Kontrollmessungen der Gapbreiten getestet. Bei diesen Messungen zeigte sich daß die Methode die Form der Gaps sehr gut beschreibt, systematische Abweichungen, die in der Methode begründet liegen, sind vernachlässigbar. Die erreichte Genauigkeit beträgt  $40\mu\text{m}$  und wird durch lokale Variationen begrenzt.

Weiterhin ist mit den Kontrollmessungen eine Methode getestet worden, die auf der Bildung eines gewichteten Mittelwertes beruht und bei anderen Kalorimetern des H1-Detektors angewendet wird. Diese Methode zeigt große systematische Abweichungen

( $> 20\mu m$ ) und die Genauigkeit ist wesentlich schlechter ( $\approx 60\mu m$ ). Die systematischen Abweichungen werden mit den Ergebnissen dieser Analyse korrigiert [KUES90].

Die Kalorimeterplatten sind an den Rändern dünner als in der Plattenmitte. Die Variationen in der Plattendicke werden durch unterschiedliche Dicken des Epoxydharzes verursacht. Die Strahlungslänge einer Absorberplatte ändert sich aufgrund des hohen Anteils des Bleiabsorbers nur geringfügig, die Auswirkungen auf das Signal sind vernachlässigbar.

Innerhalb einer  $\Theta$ -Lage ist die mittlere Gapbreite eines Auslesekanals in der Größenordnung von  $15\mu m$  konstant. Relevante Veränderungen im Signal bei Verschiebungen des Einfallortes der Teilchen sind daher nicht zu erwarten, was durch Monte-Carlo-Simulationen bestätigt wird.

Die mittleren Gapbreiten der einzelnen  $\Theta$ -Lagen unterscheiden sich dagegen bis zu  $60\mu m$ . Bei der Verschiebung des Schauerschwerpunktes in  $Y$ -Richtung, was einer Veränderung der Energie des einfallenden Teilchens entspricht, sind daher Signalveränderungen zu erwarten. Die Analysen mit Monte-Carlo-Simulationen werden zur Zeit durchgeführt.

Die Korrekturfaktoren für die Variation der Gapbreite ergeben sich aus dem Verhältnis der mittleren Gapbreite des Auslesekanals zu der Normgapbreite und sind bestimmt worden.

Bei der Rekonstruktion der Dicke eines Stacks aus den einzeln rekonstruierten Platten und Gaps erhält man flache Plattenstapel, die Abweichungen mit Ausnahme der Ränder liegen in der Größenordnung der Meßgenauigkeit der Gapbreiten. Die Abweichungen an den Rändern bestätigen die Abnahme der Plattendicke dort.

Die ersten Ergebnisse der Monte-Carlo Studien ergeben eine obere Abschätzung der Signalveränderung bei senkrechtem Einfallswinkel durch die Variationen von 4.7 %. Bei den im H1-Detektor vorkommenden Einfallswinkeln deuten sich Signalveränderungen im Bereich von 1 % an. Die Analysen, die die Resultate dieser Arbeit nutzen, sind jedoch zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht abgeschlossen [GUZI91].

# Danksagung

An erster Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. D. Wegener für die Aufgabenstellung dieser Arbeit danken. Seine aufmerksame Betreuung hat mir bei der Erstellung dieser Diplomarbeit sehr geholfen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. K. Rauschnabel. Seine äußerst hilfreichen Vorschläge und Anregungen und insbesondere die ausführlichen Gespräche mit ihm haben wesentlich zu dem Zustandekommen dieser Arbeit beigetragen.

Weiterhin danke ich den Mitgliedern des Lehrstuhls EV der Abteilung Physik an der Universität Dortmund, die eine Atmosphäre geschaffen haben, in der es Spaß machte zu arbeiten. Ihre Hilfsbereitschaft hat viele Probleme gar nicht erst entstehen lassen.

U. Buchner, P. Hartz und U. Lenhardt sei insbesondere für das sorgfältige Lesen dieser Diplomarbeit und ihren Vorschlägen gedankt.

Schließlich möchte ich meinen Eltern für die Ermöglichung des Physik-Studiums danken und für die vielfältige Unterstützung, die sich nicht nur auf das Studium erstreckte.

Diese Arbeit wurde mit Mitteln des Bundesministeriums für Forschung und Technologie gefördert.

# Literaturverzeichnis

- [AMAL81] U. Amaldi  
*Fluctuations in Calorimetry Measurements*  
Physica Scripta 23 (1981) 409
- [BATH70] G. Bathow, E. Freytag, M. Köbberling  
*Measurements of the longitudinal and lateral Development of electromagnetic Cascades in Lead, Copper and Aluminium at 6 GeV*  
Nucl. Phys. **B20**(1970) 592
- [BEND73] E. Bender  
*Cryogenics*  
January (1973), 11
- [BERG82] M.J. Berger, S.M. Seltzer  
*Stopping Powers and Ranges of Electrons and Positrons*  
U.S. National Bureau of Standards Report  
NBSIR 82-2550-A(1982)
- [BETH34] H. Bethe, W. Heitler  
Proc. Roy. Soc. A 146 (1934) 83
- [BLEI] Bleiberatung e.V.  
*Blei*  
Düsseldorf, Postfach 8706, Tersteegenstraße 28
- [BORR87] K. Borrás  
*Simulation des Teilchennachweises mit dem elektromagnetischen Flüssig-Argon-Testkalorimeter des H1-Detektors*  
Diplomarbeit, Universität Dortmund 1987
- [BRON86] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew  
*Taschenbuch der Mathematik*  
Verlag Harri Deutsch, 24 Auflage 1986

- [CERNLIB] CERN Computer Centre  
*CERN Program Library* CERN, Genf
- [COLO90] M. Colombo  
*Trennung von Elektronen und Pionen in einem Flüssigargonkalorimeter des H1 Detektors*  
Diplomarbeit, Universität Dortmund 1990
- [DRES82] A. Drescher  
*Untersuchungen an den Schauerzählern des ARGUS-Detektors*  
Diplomarbeit, Universität Dortmund 1982
- [ELLE91] M. Ellers  
*Untersuchungen zum Teilchennachweis im Randbereich eines elektromagnetischen Flüssig-Argon-Kalorimeters*  
Diplomarbeit in Vorbereitung, Universität Dortmund 1991
- [FELT87] J. Feltese  
*Measurement of inclusive differential cross sections*  
Proc. of the HERA Workshop, DESY  
Editor: R.D. Pecci
- [FELT89] J. Feltese  
*Liquid noble gas and warm liquid detectors*  
Nucl. Instrum. Methods A283 (1989) 375-386
- [GUZI91] D. Guzik  
Diplomarbeit in Vorbereitung, Universität Dortmund 1991
- [H1-86] H1-Collaboration  
*Technical Proposal for the H1-Detector*  
1986
- [H1-87] H1-Collaboration  
*Technical progress report, 1987*  
*Technical progress report, 1988*  
*Technical progress report, 1989*  
*Technical progress report, 1990*
- [H1M05] M. Korn  
*H1-Memorandum Do-H1-5: Board thicknesses for FB2E and BBE stacks*  
1990

- [H1M06] U. Lenhardt  
*H1-Memorandum DO-H1-6: Gap measurement of FB2E*  
1990
- [H1M07] U. Lenhardt  
*H1-Memorandum DO-H1-7: Gap measurement of BBE*  
1990
- [HEIS25] W. Heisenberg  
Z. Physik **33**(1925) 879
- [HEIT53] W. Heitler  
*Quantum Theory of Radiation*  
Oxford University Press, 1953
- [JAME66] W.R. James  
*Fortran IV Program using Double Fourier Series for Surface Fitting of irregularly spaced Data*  
Computer Contribution 5, State Geological Survey  
The University of Kansas, Lawrence (1966)
- [KLEIN87] K. Kleinknecht  
*Detektoren für Teilchenstrahlung*  
B.G. Teubner, Stuttgart 1987
- [KOLA90] M. Kolander  
*Private Mitteilung*  
1990
- [KORN91] M. Korn  
*Private Mitteilung*  
1991
- [KUES90] H. Küster  
*Private Mitteilung*  
1990
- [LEBO78] D. Leborgne  
*Etude du lissage d'histogrammes par la méthode dite des B-Splines. Introduction des sous-programmes correspondants dans la librairie FORTRAN d'analyse statistique HBOOK*  
CERN DD/EE/78-3, 1978

- [LENH89] U. Lenhardt  
*Optimierungsuntersuchungen an einem elektromagnetischen Flüssig--Argon-Kalorimeter des H1-Detektors*  
 Diplomarbeit, Universität Dortmund 1989
- [LONG75] E. Longo, I. Sestili  
*Monte Carlo Calculation of Photon-initialized Electromagnetic Showers in Lead Glass*  
 Nucl. Instr. Meth. 128 (1975) 283
- [MESS70] H. Messel, D.F. Crawford  
*Electron-Photon Shower Distribution  
 Function Tables for Lead, Copper and Air Absorbers*  
 Pergamon Press, Oxford (1970)
- [MOLI48] G. Molière  
 Z. Naturforsch. 3a (1948) 78
- [NELS85] W.R. Nelson, H. Hirayama, D.W.O. Rogers  
*The EGS4 Code System*  
 SLAC-265, Stanford Linear Accelerator Center (1985)
- [OTT53] K. Ott  
*Die Einzelprozesse der Elektronen und Lichtquanten*  
 aus:  
 W. Heisenberg (Herausgeber)  
 Kosmische Strahlung (2. Auflage), S.320-349  
 Springer Verlag, Berlin 1953
- [PART90] Particle Data Group  
*Particle Properties Data Booklet*  
 CERN Scientific Information Service, April 1990
- [PECC88] R.D. Peccei (Editor)  
*Proceedings of the HERA workshop*  
 DESY, 1988
- [PERK87] D.H. Perkins  
*Introduction to High energy Physics*  
 Addison-Wesley, 1987
- [ROSS64] B. Rossi  
*High Energy Particles*  
 Prentice Hall, New York 1964

- [SCHMITZ] W. Schmitz  
*Private Mitteilung*  
1990
- [SEGR53] E. Ségre  
Experimental Nuclear Physics, Volume I (1953)  
John Wiley & Sons, Inc., New York  
Chapman & Hall, Limited, London
- [SEGR65] E. Ségre  
*Nuclei and Particles*  
Benjamin, New York 1965
- [SPAЕ73] Helmuth Späth  
*Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen*  
R. Oldenbourg Verlag, 1973
- [SPAЕ90] Helmuth Späth  
*Eindimensionale Spline-Interpolationsalgorithmen*  
R. Oldenbourg Verlag, 1990
- [STER52] R.M. Sternheimer  
*The Density Effect for Ionisation Loss in Various Materials*  
Phys. Rev. 88 (1952) 851
- [WEGE90] J. Wegener  
*Private Mitteilung*  
Die Messungen wurden freundlicherweise in dem Labor der VALVO durchgeführt.  
1990